



Ευσταθές ταίριασμα

*(υλικό βασισμένο στο βιβλίο
των Kleinberg - Tardos)*



Slides by Kevin Wayne.
Copyright © 2005 Pearson-Addison Wesley.
All rights reserved.

Ανάθεση Ειδικευόμενων Ιατρών σε Νοσοκομεία

Πρόβλημα. Δεδομένου ενός συνόλου από προτιμήσεις ανάμεσα σε νοσοκομεία και υποψήφιους ειδικευόμενους ιατρούς, να σχεδιαστεί μία **αυτό-επιβαλλόμενη** διαδικασία προσλήψεων.

Υποτίθεται ότι κάθε νοσοκομείο έχει τα δικά του κριτήρια επιλογής και τα κριτήρια μπορεί να διαφέρουν από νοσοκομείο σε νοσοκομείο. Επίσης, και οι υποψήφιοι ενδέχεται να έχουν διαφορετικές προτιμήσεις.

Ασταθές Ζεύγος: ο υποψήφιος x και το νοσοκομείο y σχηματίζουν **ασταθές ζεύγος** αν:

- Ο x προτιμά το y από το νοσοκομείο στο οποίο τοποθετήθηκε.
- Το νοσοκομείο y προτιμά τον x από τουλάχιστον ένα από τους υποψηφίους που δέχθηκε.

Ευσταθής ανάθεση. Η ανάθεση χωρίς ασταθή ζεύγη.

- Φυσική και επιθυμητή συνθήκη.
- Το ίδιο το προσωπικό συμφέρον του καθενός αποτρέπει αλλαγές.

Το πρόβλημα του ευσταθούς ταιριάσματος

(μία απλούστερη έκδοση, η οποία όμως έχει όλα τα βασικά στοιχεία του γενικότερου προβλήματος)

Σκοπός. Δεδομένων η ανδρών και η γυναικών, να βρεθεί ένα «κατάλληλο» ταίριαμα.

- Οι συμμετέχοντες αξιολογούν όλα τα μέλη του αντίθετου φύλου.
- Κάθε άνδρας κατατάσσει τις γυναίκες από την καλύτερη στη χειρότερη σε γνησίως φθίνουσα σειρά.
- Κάθε γυναίκα κατατάσσει τους άνδρες από τον καλύτερο στον χειρότερο σε γνησίως φθίνουσα σειρά.

	Καλύτερη ↓		Χειρότερη ↓
	1 st	2 nd	3 rd
Xavier	Amy	Bertha	Clare
Yancey	Bertha	Amy	Clare
Zeus	Amy	Bertha	Clare

Προτιμήσεις Ανδρών

	Καλύτερος ↓		Χειρότερος ↓
	1 st	2 nd	3 rd
Amy	Yancey	Xavier	Zeus
Bertha	Xavier	Yancey	Zeus
Clare	Xavier	Yancey	Zeus

Προτιμήσεις Γυναικών

Το πρόβλημα του ευσταθούς ταιριάσματος

Ταίριασμα: Κάθε άνδρας έχει το πολύ μία γυναίκα και κάθε γυναίκα έχει το πολύ έναν άνδρα.

Τέλειο Ταίριασμα:

- Κάθε άνδρας έχει μία και μόνο μία γυναίκα.
- Κάθε γυναίκα έχει έναν και μόνο έναν άνδρα.

Ευστάθεια: δεν υπάρχει κίνητρο από κανένα ζεύγος να χαλάσει ένα ταίριασμα.

- Σε ένα ταίριασμα M , ένα ζεύγος $m-w$ που δεν υπάρχει στο M είναι **αστάθεια** αν ο m και η w προτιμούν ο ένας τον άλλο από τους συντρόφους τους στο M .
- Το ζεύγος $m-w$ μπορεί να βελτιώσει την κατάστασή του εγκαταλείποντας τους τωρινούς συντρόφους.

Ευσταθές Ταίριασμα: τέλειο ταίριασμα χωρίς ασταθή ζεύγη.

Πρόβλημα ευσταθούς ταιριάσματος Δεδομένων των λιστών προτίμησης n ανδρών και n γυναικών, να βρεθεί ένα ευσταθές ταίριασμα αν υπάρχει.

Το πρόβλημα του ευσταθούς ταιριάσματος

Ερώτημα. Είναι η ανάθεση X-C, Y-B, Z-A ευσταθής;

	καλύτερη ↓		χειρότερη ↓
	1 st	2 nd	3 rd
Xavier	Amy	Bertha	Clare
Yancey	Bertha	Amy	Clare
Zeus	Amy	Bertha	Clare

Προτιμήσεις Ανδρών

	καλύτερος ↓		χειρότερος ↓
	1 st	2 nd	3 rd
Amy	Yancey	Xavier	Zeus
Bertha	Xavier	Yancey	Zeus
Clare	Xavier	Yancey	Zeus

Προτιμήσεις γυναικών

Το πρόβλημα του ευσταθούς ταιριάσματος

Ερώτημα. Είναι η ανάθεση X-C, Y-B, Z-A ευσταθής;

Απάντηση. Όχι. Η Bertha και ο Xavier θα αφήσουν τους συντρόφους τους για χάρη ο ένας του άλλου.

	καλύτερη ↓		χειρότερη ↓
	1 st	2 nd	3 rd
Xavier	Amy	Bertha	Clare
Yancey	Bertha	Amy	Clare
Zeus	Amy	Bertha	Clare

Προτιμήσεις Ανδρών

	καλύτερος ↓		χειρότερος ↓
	1 st	2 nd	3 rd
Amy	Yancey	Xavier	Zeus
Bertha	Xavier	Yancey	Zeus
Clare	Xavier	Yancey	Zeus

Προτιμήσεις γυναικών

Το πρόβλημα του ευσταθούς ταιριάσματος

Ερώτημα. Είναι η ανάθεση X-A, Y-B, Z-C ευσταθής;

Απάντηση. Ναι.

	καλύτερη ↓		χειρότερη ↓
	1 st	2 nd	3 rd
Xavier	Amy	Bertha	Clare
Yancey	Bertha	Amy	Clare
Zeus	Amy	Bertha	Clare

Προτιμήσεις Ανδρών

	καλύτερος ↓		χειρότερος ↓
	1 st	2 nd	3 rd
Amy	Yancey	Xavier	Zeus
Bertha	Xavier	Yancey	Zeus
Clare	Xavier	Yancey	Zeus

Προτιμήσεις γυναικών

Ο αλγόριθμος Gale-Shapley

Ο αλγόριθμος εγγυάται ότι θα βρεθεί ευσταθές ταίριασμα

```
Initialize each person to be free.
while (some man is free and hasn't proposed to every woman) {
    Choose such a man m
    w = 1st woman on m's list to whom m has not yet proposed
    if (w is free)
        assign m and w to be engaged
    else if (w prefers m to her fiancé m')
        assign m and w to be engaged, and m' to be free
    else
        w rejects m
}
```


Απόδειξη Ορθότητας: Τερματισμός

Παρατήρηση 1. Οι άνδρες προτείνουν στις γυναίκες με φθίνουσα σειρά προτίμησης (δηλ. πρώτα προτείνουν στην καλύτερη γι αυτούς, μετά στη δεύτερη καλύτερη, κ.ο.κ.).

Παρατήρηση 2. Από τη στιγμή που μία γυναίκα δεσμεύεται αρχικά, ποτέ δεν γίνεται να ξανα-ελευθερωθεί.

Ισχυρισμός. Ο αλγόριθμος τερματίζει μετά το **πολύ** n^2 επαναλήψεις του while βρόχου.

Απόδειξη. Σε κάθε εκτέλεση του βρόχου, γίνεται μία νέα πρόταση. Υπάρχουν μόνο n^2 πιθανές προτάσεις. ▀

	1 st	2 nd	3 rd	4 th	5 th
Victor	A	B	C	D	E
Wyatt	B	C	D	A	E
Xavier	C	D	A	B	E
Yancey	D	A	B	C	E
Zeus	A	B	C	D	E

	1 st	2 nd	3 rd	4 th	5 th
Amy	W	X	Y	Z	V
Bertha	X	Y	Z	V	W
Clare	Y	Z	V	W	X
Diane	Z	V	W	X	Y
Erika	V	W	X	Y	Z

$n(n-1) + 1$ προτάσεις απαιτούνται

Απόδειξη Ορθότητας: Παραγωγή Τέλειου Ταιριάσματος

Ισχυρισμός. Όλοι οι άνδρες και οι γυναίκες συμμετέχουν στο ταίριασμα.

Απόδειξη (με απαγωγή σε άτοπο).

- Ας υποθέσουμε ότι ένας άνδρας, π.χ. ο Zeus, όταν ολοκληρώνεται ο αλγόριθμος δεν συμμετέχει σε κάποιο ζεύγος.
- Τότε θα υπάρχει και μία γυναίκα, π.χ. η Amy, η οποία δεν συμμετέχει σε κάποιο ζεύγος.
- Από την Παρατήρηση 2, συμπεραίνεται ότι ποτέ η Amy δε δέχθηκε πρόταση.
- Αλλά για να τελειώσει ο αλγόριθμος πρέπει ο Zeus να έχει προτείνει σε όλες. Οδηγηθήκαμε δηλαδή σε άτοπο. ▪

Απόδειξη Ορθότητας: Ευστάθεια

Ισχυρισμός. Όχι ασταθή ζεύγη.

Απόδειξη. (με απαγωγή σε άτοπο)

- Έστω ότι το ζεύγος $A-Z$ είναι ασταθές: ο καθένας προτιμά τον άλλο από τον σύντροφο, ο οποίος αντιστοιχεί στο ταίριασμα S^* στο οποίο κατέληξε ο αλγόριθμος.

Οι άνδρες προτείνουν με φθίνουσα
σειρά προτίμησης

S^*

- Περίπτωση 1: ο Z δεν έχει προτείνει στην A .
 - ⇒ Z προτιμά τη σύντροφο στο S^* από την A .
 - ⇒ $A-Z$ δεν προκαλεί αστάθεια.

Amy-Yancey
Bertha-Zeus
...

- Περίπτωση 2: ο Z έχει προτείνει στην A .
 - ⇒ η A απέρριψε τον Z (είτε αμέσως είτε αργότερα)
 - ⇒ η A προτιμά τον σύντροφο στο S^* από τον Z .
 - ⇒ $A-Z$ δεν προκαλεί αστάθεια.

Οι γυναίκες αφήνουν ένα άνδρα
μόνο για κάποιον καλύτερο

- Άρα και στις 2 περιπτώσεις οδηγηθήκαμε σε άτοπο. ▪

Εμβάθυνση

Ερώτημα. Για κάποιο στιγμιότυπο, μπορεί να υπάρχουν πολλαπλά ευσταθή ταιριάσματα. Όλες οι εκτελέσεις του αλγορίθμου δίνουν το ίδιο ταίριασμα; Και αν ναι, ποιο είναι αυτό;

Ορισμός. Ο άνδρας m είναι **έγκυρος σύντροφος** της γυναίκας w αν υπάρχει κάποιο ευσταθές ταίριασμα στο οποίο είναι ζεύγος.

Βέλτιση για τους άνδρες ανάθεση. Ο κάθε άνδρας παίρνει την καλύτερη έγκυρη σύντροφό του.

Ισχυρισμός. Κάθε εκτέλεση του αλγορίθμου παράγει **μία βέλτιστη για τους άνδρες ανάθεση**, που είναι ταυτόχρονα και ευσταθές ταίριασμα.

- Δεν είναι προφανές ότι η βέλτιστη για τους άνδρες ανάθεση είναι κατ'αρχήν τέλειο/ευσταθές ταίριασμα.
- Πρέπει να αποδείξουμε ότι μπορεί ταυτόχρονα κάθε άνδρας να έχει τη βέλτιστη σύντροφο.

Βελτιστότητα για τους άνδρες

Ισχυρισμός. Το αποτέλεσμα του αλγορίθμου S^* είναι βέλτιστο για τους άνδρες.

Απόδειξη. (με απαγωγή σε άτοπο)

- Έστω ότι ένας άνδρας ταιριάζεται με μία σύντροφο που δεν είναι η βέλτιστή του. Καθώς οι άνδρες προτείνουν βάσει της σειράς προτίμησης \Rightarrow κάποιος άνδρας έχει απορριφθεί από μία έγκυρη σύντροφο.
- Έστω Y ο **πρώτος** τέτοιος άνδρας, και έστω A η **πρώτη** έγκυρη γυναίκα που τον απορρίπτει.
- Έστω S το ευσταθές ταίριασμα όπου η A και ο Y είναι ζεύγος.
- Όταν ο Y απορρίπτεται, η A δεσμεύεται με κάποιον άνδρα, π.χ. τον Z , τον οποίο προτιμά από τον Y .
- Έστω ότι η σύντροφος του Z στο S είναι η B .
- Ο Z δεν έχει απορριφθεί από έγκυρη σύντροφο τη στιγμή που ο Y απορρίπτεται από την A (αφού η απόρριψη του Y είναι η πρώτη). Άρα, ο Z προτιμά την A από την B .
- Αλλά και η A προτιμά τον Z από τον Y .
- Άρα το ζεύγος $A-Z$ είναι ασταθές στο S . Άτοπο(δηλ. δε γίνεται να υπάρχει τέτοιο S) ▪

S
Amy-Yancey
Bertha-Zeus
...

Οι γυναίκες καταλήγουν με τον χειρότερο έγκυρο σύντροφο

Απόδειξη.

- Έστω ότι ο αλγόριθμος παράγει το ζεύγος $A-Z$, αλλά ο Z δεν είναι ο χειρότερος έγκυρος σύντροφος της A .
- Τότε θα υπάρχει ευσταθές ταίριασμα S , στο οποίο η A είναι με ένα άλλο άνδρα, π.χ. τον Y , τον οποίο ΔΕΝ προτιμά από τον Z .
- Έστω ότι η σύντροφος του Z στο S είναι η B .
- Ο Z προτιμά την A από τη B (λόγω της βελτιστότητας για τους άνδρες) και σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση και η A προτιμά τον Z από τον Y .
- Άρα, το ζεύγος $A-Z$ είναι αστάθεια στο S . Άτοπο.▪

S

Amy-Yancey

Bertha-Zeus

...