ΚΑΤΗΓΟΡΗΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

- Για τον προτασιακό λογισμό παρουσιάσαμε
  - την αποδεικτική θεωρία (natural deduction/λογικό συμπέρασμα)
  - τη σύνταξη (ορίζεται με γραμματική χωρίς συμφραζόμενα και εκφράζεται με συντακτικά δέντρα)
  - τη σημασία (πίνακες αληθείας)
- Αυτά είναι τα βασικά στοιχεία που συγκροτούν μία τυπική γλώσσα.
- Ο προτασιακός λογισμός είναι μία ***τυπική γλώσσα κατάλληλη για δηλωτικές προτάσεις***, προτάσεις δηλαδή για τις οποίες μπορεί να δοθεί μία τιμή αληθείας.

ΚΑΤΗΓΟΡΗΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ

- Ενώ ο προτασιακός λογισμός λειτουργεί ικανοποιητικά για προτάσεις με τμήματα `not`, `and`, `or` δεν είναι επαρκής για την περιγραφή άλλων προσδιορισμών που απαντώνται σε φυσικές ή τεχνητές γλώσσες όπως για παράδειγμα υπάρχει (`there exists`), όλοι (`all`), μόνο (`only`) κλπ.
- Για να καλυφθεί αυτό το κενό δημιουργήθηκε ο ***κατηγορηματικός λογισμός*** (predicate logic), που είναι επίσης γνωστός ως ***λογική πρώτης τάξης*** (first order logic).

ΚΑΤΗΓΟΡΗΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙΙ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

«Κάθε φοιτητής είναι νεότερος από κάποιο καθηγητή»

Στον προτασιακό λογισμό η παραπάνω πρόταση δεν μπορεί παρά να είναι ένας πρωταρχικός (ατομικός) τύπος με συγκεκριμένη τιμή αληθείας, αλλά εμείς ενδιαφερόμαστε να αναδείξουμε μία πιο λεπτομερή εικόνα της λογικής δομής της πρότασης.

Για το σκοπό αυτό μπορούμε να χρησιμοποιούμε ***κατηγορήματα*** της μορφής:

S (*Μαρία*) που εκφράζει το ότι η *Μαρία* είναι φοιτήτρια

I (*Παναγιώτης*) που εκφράζει το ότι ο *Παναγιώτης* είναι καθηγητής

Y (*Μαρία*, *Παναγιώτης*) που εκφράζει ότι η *Μαρία* είναι νεότερη από τον *Παναγιώτη*

Πρέπει να είμαστε προσεκτικοί στον ορισμό της σημασίας των κατηγορημάτων γιατί θα μπορούσε π.χ. η σημασία του *Y* να ερμηνεύεται με διαφορετικό τρόπο από τον επιθυμητό.

ΚΑΤΗΓΟΡΗΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ IV

Θέλουμε επίσης να μπορούμε να εκφράζουμε κατηγορήματα με προσδιοριστές της μορφής *για κάθε* ή *υπάρχει*. Αυτό θα μπορούσε να γίνει αν γράφαμε

$$S(\cdot)$$

όπου η $\cdot$ θα μπορούσε να αντικαθιστάται από το όνομα του κάθε φοιτητή.

Αυτό όμως δεν θα βόλευε γιατί θα είχε ως συνέπεια όταν θα θέλαμε να κωδικοποιήσουμε μία πρόταση για την εκτέλεση ενός προγράμματος να πρέπει να γράψουμε την ίδια πρόταση για κάθε κατάσταση του προγράμματος.

Για το λόγο αυτό χρησιμοποιούμε ***μεταβλητές***.

ΚΑΤΗΓΟΡΗΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ V

Οι μεταβλητές γράφονται ως

$x, y, z, \ldots$ ή x_1, x_2, x_3

και ουσιαστικά είναι σύμβολα αντικαθιστάμενα από συγκεκριμένες τιμές.

Με τη χρήση μεταβλητών μπορούμε να ορίσουμε και τυπικά την σημασία των κατηγορημάτων:

$S(x)$	: ο x είναι φοιτητής
$I(x)$	: ο x είναι καθηγητής
$Y(x, y)$	: ο x είναι νεότερος από τον y

Η χρήση μεταβλητών δεν αρκεί για τον ορισμό κατηγορημάτων, αλλά χρειαζόμαστε και ***ποσοδείκτες*** όπως $\forall$ (για κάθε), $\exists$ (υπάρχει), που πάντα συνοδεύονται από όνομα μεταβλητής.

ΚΑΤΗΓΟΡΗΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ VI

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

«Κάθε φοιτητής είναι νεότερος από κάποιο καθηγητή»

«**Κάθε** φοιτητής x είναι νεότερος από **κάποιο** καθηγητή y»

$$\forall x\, (S(x) \rightarrow (\exists y\, (I(y) \wedge Y(x, y))))$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΙΙ

«Δεν μπορούν να πετάξουν **όλα** τα πουλιά»

$B(x)$: το x είναι πουλί

$F(x)$: το x πετάει

$$\neg\, (\forall\, x\, (B(x) \rightarrow F(x)))$$ ή

$$\exists x\, (B(x) \wedge \neg F(x))$$

ΚΑΤΗΓΟΡΗΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ VII

Οι δύο προτάσεις του τελευταίου παραδείγματος είναι ***σημασιολογικά ισοδύναμες***.

- Εκείνο που χρειάζεται είναι μία αποδεικτική θεωρία που

  να επιτρέπει την εξαγωγή συμπερασμάτων συμβολικά ($\vdash$) ή σημασιολογικά ($\models$).
- Επίσης, η αποτίμηση τύπων κατηγορηματικού λογισμού είναι αρκετά διαφορετική από τον υπολογισμό με βάση τους πίνακες αληθείας που είδαμε για τον προτασιακό λογισμό.

ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΤΥΠΙΚΗΣ ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗΣ Ι

- ***Τυπική επαλήθευση βάση απόδειξης***

  Η περιγραφή του συστήματος δίνεται ως ένα σύνολο τύπων ***Γ*** σε κάποια γλώσσα λογικής και η ιδιότητα που πρέπει να επαληθευτεί δίνεται από κάποιο τύπο έστω φ.

  Η μέθοδος επαλήθευσης αποσκοπεί στο να βρεθεί μία απόδειξη ότι $\boldsymbol{\Gamma} \vdash \phi$.

- ***Τυπική επαλήθευση βάση μοντέλου***

  Στις προσεγγίσεις που βασίζονται σε μοντέλα το σύστημα περιγράφεται από ένα πεπερασμένο μοντέλο ***Μ*** κατάλληλο για κάποια γλώσσα λογικής. Η ιδιότητα επίσης εκφράζεται από κάποιο τύπο φ και η επαλήθευση είναι ένας υπολογισμός που εξακριβώνει αν ένα μοντέλο ***Μ*** ικανοποιεί τον τύπο φ ($\boldsymbol{M} \models \phi$). Αυτός ο έλεγχος γίνεται συνήθως αυτόματα.

ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΤΥΠΙΚΗΣ ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗΣ ΙΙ

- Μία αποδεικτική θεωρία όταν λέμε ότι είναι ***καλά ορισμένη*** (sound) και ***πλήρης*** (complete) και αυτό πρέπει

  να μπορεί να αποδειχθεί, εννοούμε ότι $\boldsymbol{\Gamma} \vdash \phi$ αν και μόνο αν $\boldsymbol{\Gamma} \models \phi$, όπου το τελευταίο σημαίνει ότι για όλα τα μοντέλα $\boldsymbol{M}$ αν $\boldsymbol{M} \models \boldsymbol{\Gamma}$, τότε $\boldsymbol{M} \models \phi$.

- Άρα δυνητικά η τυπική επαλήθευση βάση μοντέλου είναι απλούστερη από την τυπική επαλήθευση βάση απόδειξης γιατί βασίζεται σε ένα μόνο μοντέλο και όχι σε ένα πιθανά άπειρο σύνολο μοντέλων.