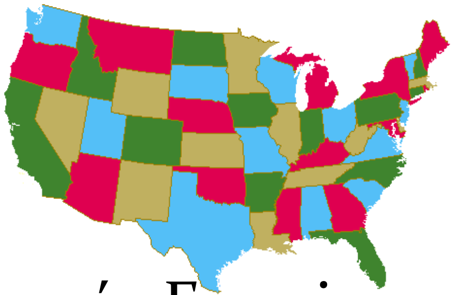
Θεώρημα τεσσάρων χρωμάτων

Ορισμός προβλήματος…

- Οποιοδήποτε επιφάνεια που χωρίζεται σε περιοχές, όπως ένας πολιτικός χάρτης των νομών ενός κράτους, μπορούν να χρωματιστούν χρησιμοποιώντας λιγότερα από τέσσερα χρώματα κατά τέτοιο τρόπο ώστε καμία από δύο **παρακείμενες περιοχές δεν έχουν το ίδιο χρώμα**.

- ήταν το **πρώτο** σημαντικό θεώρημα που αποδεικνύεται, χρησιμοποιώντας **υπολογιστή**, και η απόδειξη δεν είναι αποδεκτή από όλους τους μαθηματικούς επειδή θα ήταν αδύνατον για έναν άνθρωπο να ελέγχθει με το χέρι.

Ιστορικά…



- Η υπόθεση προτάθηκε αρχικά το 1852, όταν ο φοιτητής Francis Guthrie προσπαθούσε να χρωματίσει το χάρτη των περιφερειών της Αγγλίας.
- Μια απόδειξη του θεωρήματος δόθηκε από τον Alfred Kempe το 1879, η οποία επικροτήθηκε ευρέως, ενώ μια άλλη απόδειξη δόθηκε από Peter Guthrie Tait το 1880. Το 1890 (11 χρόνια αργότερα) η απόδειξη «Kempe» παρουσιάστηκε ανακριβής από τον Percy Heawood, και το 1891 η απόδειξη Tait ακυρώθηκε από τον Julius Petersen.
- Το 1890, εκτός από την έκθεση που αντικρούει την απόδειξη Kempe, ο Heawood απέδειξε ότι όλες οι επίπεδοι γράφοι είναι «χρωματίσιμοι» πέντε χρωμάτων (σχετικό θεώρημα)…

Ιστορικά…

- Το 1976 το θεώρημα των 4 χρωμάτων αποδείχθηκε τελικά από τον Kenneth Appel και Wolfgang Haken απ το πανεπιστήμιο του Ιλλινόις . Βοηθήθηκαν από τον John Koch και τον υπολογιστή του (επί 1200 ώρες).
- ΘΕΩΡΗΜΑ: *έστω G = (V,E) ένας επίπεδος γραφός, τότε* $\chi(G) \leq 4$.
- Από την παρουσίαση αποδείξεων του θεωρήματος, οι πιο αποδοτικοί αλγόριθμοι που έχουν βρεθεί για χάρτες 4-χρωματων απαιτούν χρόνο $\mathbf{O}(\boldsymbol{v}^2)$, όπου *το ν* είναι ο αριθμός κορυφών.
- Το 1996, ο Neil Robertson, ο Ντάνιελ P. Sanders, Paul Seymour και ο Robin Thomas δημιούργησαν έναν τετραγωνικό χρονικό αλγόριθμο, (εργασία του ρώσου Belaga) που βελτιώνει έναν $\mathbf{O}(\boldsymbol{v}^4)$ αλγόριθμο βασισμένο στην απόδειξη Appel και Haken.

Ιστορικά…

- Το 2004 Benjamin Werner και Georges Gonthier τυποποίησαν μια απόδειξη του θεωρήματος μέσα από το εργαλείο αποδείξεων **Coq**.
- Υπάρχουν επίσης αποδοτικοί αλγόριθμοι για να καθορίσουν εάν 1 ή 2 χρώματα είναι αρκετά να χρωματίσουν έναν χάρτη. Ο αλγόριθμος καθορισμού εάν 3 χρώματα αρκούν, είναι εντούτοις, NP-πλήρης, και φυσικά δεν έχει μια γρήγορη λύση. Ο αλγόριθμος καθορισμού εάν ένας γενικός (ενδεχομένως μη επίπεδος) γράφος μπορεί να 4-χρωματιστεί είναι επίσης NP-πλήρης.
- Αν και το θεώρημα τεσσάρων χρωμάτων ανακαλύφθηκε στο στάδιο του χρωματισμού ενός πραγματικού χάρτη, δεν βρίσκει καμία εφαρμογή στην πρακτική χαρτογραφία.

Παράδειγμα – Χρωματισμός Χάρτη

- Θέλουμε να χρωματίσουμε κάθε περιοχή στο χάρτη με διαφορετικό χρώμα

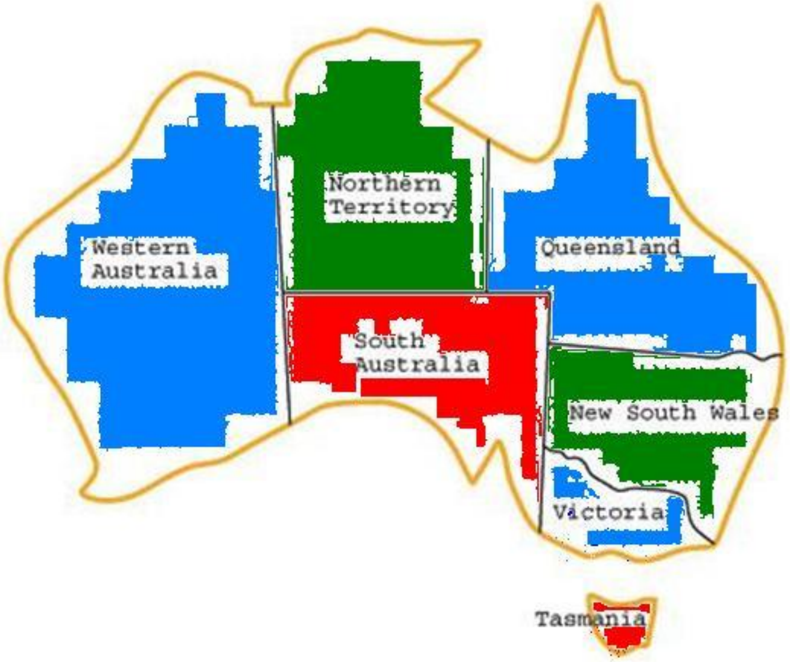
Μεταβλητές:
WA, NT, SA, Q, NSW, V, T

- Έχουμε τρία χρώματα *(Πεδίο Ορισμού)*: **red**, **green**, **blue**

Παράδειγμα συνέχεια…

-Αλγόριθμος-

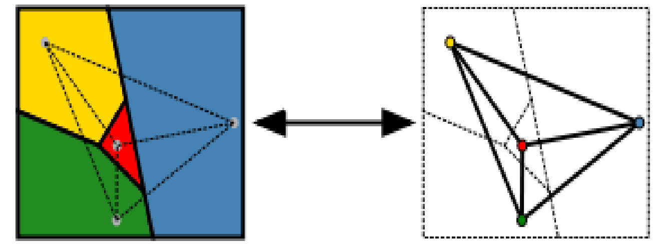
1. Ξεκινάμε με τη χώρα που συνορεύει με περισσότερες χώρες.
2. Χρωματίζουμε τη χώρα με το πρώτο «ελεύθερο χρώμα».
3. Συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία με την επόμενη χώρα μέχρις ότου όλος ο χάρτης να χρωματιστεί

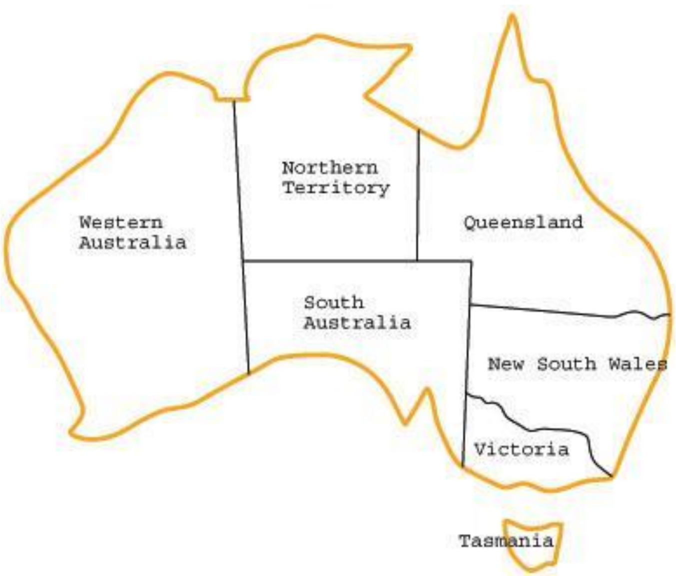


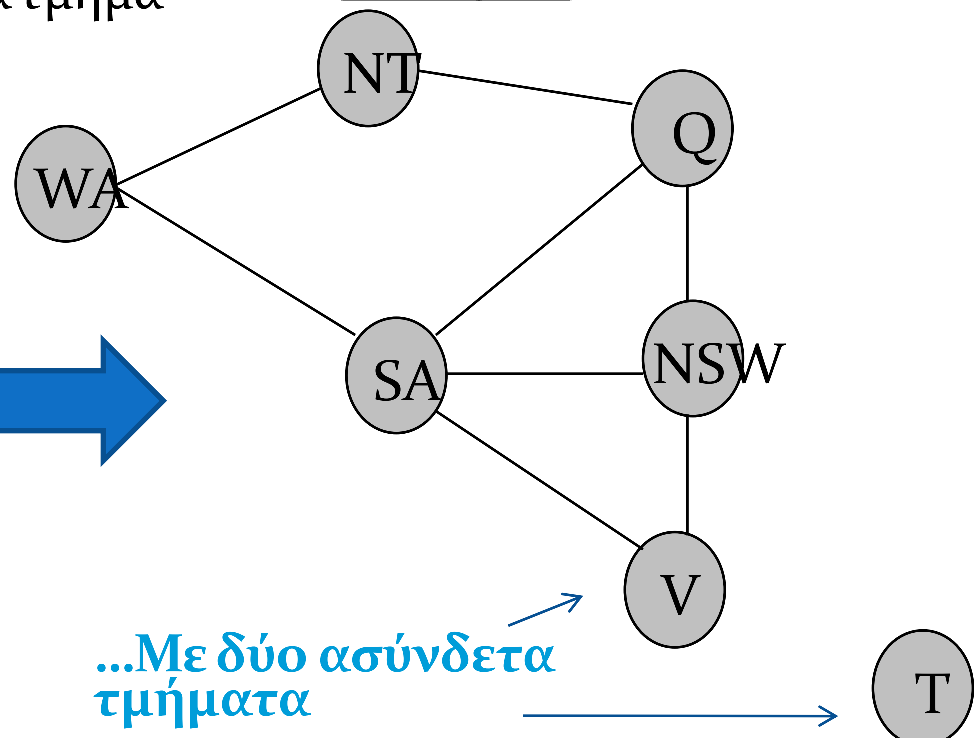
- σειρά χρωμάτων: red, green, blue

Μετατροπή χάρτη → γράφο

κάθε περιοχή του χάρτη αντικαθίσταται από κορυφή της γραφικής παράστασης, και δύο κορυφές συνδέονται με μια άκρη εάν και μόνο εάν οι δύο περιοχές μοιράζονται ένα τμήμα συνόρων (όχι μόνο μια γωνία).



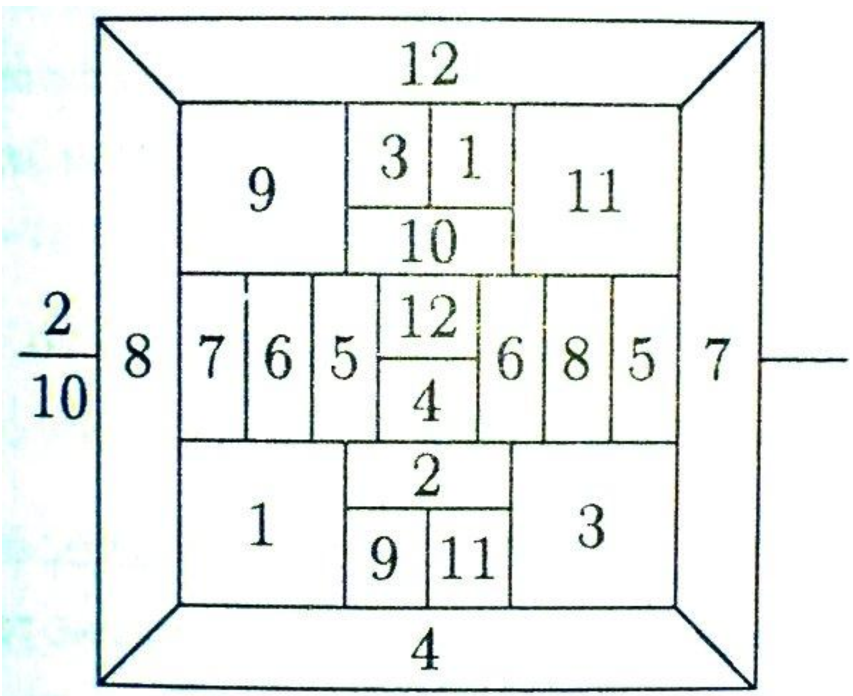




Empire problem

- Τέθηκε και λύθηκε το 1890 από τον Heawood που θεώρησε χάρτες όπου διάφορες χώρες είναι σύμμαχες και επομένως πρέπει να χρωματιστούν με το ίδιο χρώμα. Υπόψη βέβαια ότι το πρόβλημα έχει ενδιαφέρον αν οι σύμμαχες χώρες δεν είναι όμορες, ενώ δύο αυτοκρατορίες είναι γειτονικές αν έχουν έστω και μία κοινή ακμή.
- **<u>Θεώρημα:</u> κάθε χάρτης αυτοκρατοριών που αποτελούνται από m χώρες μπορεί να χρωματισθεί με 6m χρώματα.**

Empire problem



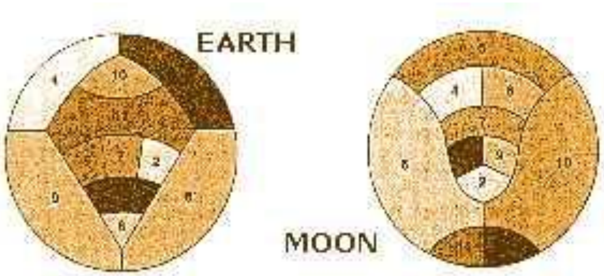
- Στο σχήμα δίνεται ένα παράδειγμα χάρτη 12 αμοιβαία γειτονικών αυτοκρατοριών που αποτελούνται από 2 χώρες. Ο χάρτης αυτός που είναι το 1ο παράδειγμα χάρτη με τα χαρακτηριστικά αυτά, σχεδιάστηκε από τον Scott Kim το 1970 δηλ. 80 χρόνια μετά από τις προσπάθειες του heawood.

Πρόβλημα «Γης-Σελήνης»

- Gerhard Ringel's Earth and Moon Problem, *1949*
- *ειδική περίπτωση του προβλήματος των αυτοκρατοριών με 2 χώρες τελείως αποκομμένες ….*
- θεωρούμε χάρτες σε 2 σφαίρες, έστω γη και σελήνη. Κάθε τμηματική περιοχή στην γη ονομάζεται «**χώρα**» και είναι συνδεδεμένη με μία «**αποικία**» στην σελήνη. Θα χρωματίσουμε χώρες και αποικίες έτσι ώστε:
  - *χρώμα χώρας == χρώμα αντίστοιχης αποικίας.*
  - *αν δύο χώρες ή αποικίες μοιράζονται κοινό σύνορο ➔ και οι δύο διαφορετικά χρώματα.*

Πρόβλημα «Γης-Σελήνης»

- ***ΕΡΩΤΗΣΗ: ποιο είναι το ελάχιστο πλήθος χρωμάτων απαραίτητων για χρωματισμό όλων των χαρτών;***
- Ο Ringel παρατήρησε ότι αυτός ο αριθμός είναι μεταξύ 8-12. Το **κάτω όριο** εύκολα αποδεικνύεται με τον σχεδιασμό 8 χωρών, κάθε μία παρακείμενη σε άλλη είτε σε σελήνη είτε σε γη. Το **άνω όριο** ακολουθεί τον τύπο Euler όμοια με την μέθοδο απόδειξης του θεωρημάτων 6 χρωμάτων.



Γενίκευση του

- Το πρόβλημα γενικεύεται για αυτοκρατορίες σε περισσότερους πλανήτες. Εάν οι πλανήτες είναι τ (thickness του γράφου) το **άνω όριο** του **6τ** και αποδεικνύεται με τον τύπο του Euler, ενώ το **κάτω όριο** του : **6τ-2.**

$$6\tau - 2 \leq k_{\tau} \leq 6\tau$$

Βιβλιογραφία

- G.Ringel; Map Color Theorem, Springer-Verlag, 1974
- «Σχηματάκια στο επίπεδο», Δημήτρης Παναγόπουλος, 2006
- **Solution of the Heawood Map-Coloring Problem,** Gerhard Ringel, and J. W. T. Youngs, **March 2007**
- Youngs, J. W. T., "The Heawood map-coloring conjecture," in Graph Theory and Theoretical,Physics (London and New York: Academic Press, 1967)
- Graph coloring, Wikipedia
- **Five Open Questions,Joan P. Hutchinson,Macalester College, St. Paul, Mn**lor
- Theorem from Wolfram MathWorld website

Φαρδέλλας Γεώργιος 977

Σπανός Γεώργιος 958

Για το μάθημα Θεωρία Γράφων