

Κεφάλαιο 5

ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΜΕ ΤΑΙΝΙΕΣ

- 5.1 Εισαγωγή
- 5.2 Φυσική συγχώνευση
- 5.3 Ισοζυγισμένη συγχώνευση
- 5.4 Πολυφασική συγχώνευση
- 5.5 Συγχώνευση καταρράκτη
- 5.6 Ασκήσεις

Κεφάλαιο 5

ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΜΕ ΤΑΙΝΙΕΣ

5.1 Εισαγωγή

Σχεδόν σε όλα τα υπολογιστικά συστήματα υπάρχουν έτοιμα πακέτα ταξινόμησης, και ο προγραμματιστής μπορεί να κωδικοποιήσει δικές του ρουτίνες ταξινόμησης αρχείων. Αν ένα αρχείο δεν είναι μεγάλο και χωρά στην κύρια μνήμη, τότε τα πράγματα είναι απλά. Εφαρμόζεται ένας οποιοσδήποτε αλγόριθμος εσωτερικής ταξινόμησης, όπως για παράδειγμα, η μέθοδος ταξινόμησης με **διαμερισμό και ανταλλαγή** (quicksort), και το αρχείο αποθηκεύεται και πάλι στη δευτερεύουσα μνήμη. Όμως, αν το αρχείο δεν χωρά στην κύρια μνήμη, τότε πρέπει να γίνει χρήση συμβατικής μνήμης, οπότε η ταχύτητα της μεθόδου καθορίζεται από το λειτουργικό σύστημα. Στο σημείο αυτό, θα υπενθυμισθεί σύντομα πώς λειτουργεί ο αλγόριθμος αυτός.

Σύμφωνα με τη μέθοδο της ταξινόμησης με διαμερισμό και ανταλλαγή, το αρχείο διαιρείται σε δύο υποαρχεία με βάση μία τιμή που λέγεται 'άξονας' (pivot). Το κάθε υποαρχείο περιέχει κλειδιά μικρότερα και μεγαλύτερα από τον άξονα, αντίστοιχα. Αυτό γίνεται με δύο σαρώσεις από την αρχή και το τέλος του αρχείου και την αντιμετάθεση των κλειδιών, που δεν βρίσκονται στο σωστό υποαρχείο. Αν γίνει σωστή εκλογή του άξονα, τότε ένα αρχείο του 1 Gb διαχωρίζεται σε δύο υποαρχεία των 500 Mb. Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται για κάθε υποαρχείο επαναληπτικά χρησιμοποιώντας μία νέα τιμή άξονα για το καθένα. Αν η κύρια μνήμη είναι 4 Mb, τότε το αρχείο αυτό πρέπει να αναγνωσθεί και να αποθηκευθεί από μία φορά κατά το πρώτο πέρασμα. Κατά μέσο όρο αυτή η διαδικασία θα πρέπει να επαναληφθεί

8 φορές πριν τα υποαρχεία είναι τόσο μικρά, ώστε να χωρέσουν στην κύρια μνήμη. Προφανώς λοιπόν, για πολύ μεγάλα αρχεία η μέθοδος ταξινόμησης με διαμερισμό και ανταλλαγή δεν ενδείκνυται για εξωτερική ταξινόμηση. Πάντως, έχει παρατηρηθεί ότι αν τα αρχεία είναι λίγο μεγαλύτερα από τη διατιθέμενη κύρια μνήμη, τότε μπορεί να χρησιμοποιηθεί αυτή η μέθοδος καθώς και η μέθοδος επιλογής αντικατάστασης, που θα παρουσιασθεί στο επόμενο κεφάλαιο.

Συνήθως, λοιπόν, τα αρχεία δεν χωρούν στην κύρια μνήμη, οπότε οι γνωστές μέθοδοι εσωτερικής ταξινόμησης δεν μπορούν να εφαρμοσθούν. Ο όρος *εξωτερική ταξινόμηση* (external sorting) αναφέρεται σε μεθόδους ταξινόμησης αρχείων, που ελάχιστα σχετίζονται με τις γνωστές μεθόδους ταξινόμησης δομών κύριας μνήμης. Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετασθούν μέθοδοι εξωτερικής ταξινόμησης, που παρουσιάστηκαν όταν κυρίαρχο μέσο για δευτερεύουσα αποθήκευση ήταν η μαγνητική ταινία, ενώ στο επόμενο θα παρουσιασθούν μέθοδοι σχεδιασμένες ειδικά για μαγνητικούς δίσκους. Όλες αυτές οι μέθοδοι εμφανίστηκαν στη βιβλιογραφία πριν το 1960 και αποτέλεσαν αντικείμενο ανάλυσης στη δεκαετία του 60, την εποχή που μοναδικός σκοπός των υπολογιστών ήταν η επεξεργασία αριθμών. Όπως θα φανεί στη συνέχεια, οι μέθοδοι που σχεδιάστηκαν για μαγνητικές ταινίες μπορούν να εφαρμοσθούν και σε μαγνητικούς δίσκους, αλλά οπωσδήποτε δεν είναι τόσο αποτελεσματικές όσο οι μέθοδοι που εφαρμόζονται ειδικά σε δίσκους. Επίσης στο παρόν κεφάλαιο θα γίνει ποιοτική ανάλυση της επίδοσης των μεθόδων αυτών. Ενώ στις μεθόδους εσωτερικής ταξινόμησης τα κριτήρια κόστους είναι ο αριθμός των συγκρίσεων και ο αριθμός των μετακινήσεων κλειδιών, στην περίπτωση της εξωτερικής ταξινόμησης το κύριο κριτήριο κόστους είναι ο αριθμός των προσπελάσεων σελίδων για είσοδο/έξοδο των δεδομένων.

Όλες οι μέθοδοι και των δύο κεφαλαίων έχουν την ίδια γενική δομή, δηλαδή υλοποιούνται σε δύο στάδια. Στο πρώτο στάδιο το αρχείο υποδιαιρείται σε τμήματα που χωρούν στην κύρια μνήμη και ταξινομούνται το καθένα με μία μέθοδο εσωτερικής ταξινόμησης. Η επιλογή της μεθόδου για την εσωτερική ταξινόμηση δεν αποτελεί πρόβλημα για το κεφάλαιο αυτό. Δηλαδή, θα μπορούσε να εφαρμοσθεί μία οποιαδήποτε μέθοδος από αυτές που περιγράφονται στο βιβλίο των Δομών Δεδομένων και χαρακτηρίζονται από πολυπλοκότητα $O(n \log n)$. Ωστόσο, στο επόμενο κεφάλαιο θα φανεί ότι έχει ιδιαίτερη σημασία για τη συνολική επίδοση της μεθόδου ποιός αλγόριθμος εσωτερικής ταξινόμησης χρησιμοποιείται για τη δημιουργία των ταξινομημένων τμημάτων.

Στο δεύτερο στάδιο, τα ταξινομημένα τμήματα συγχωνεύονται ώστε να προκύψει ένα ταξινομημένο αρχείο. Για αυτό το λόγο, οι μέθοδοι που ακολουθούν είναι γνωστές ως 'συγχωνεύσεις'. Ο αναγνώστης καλείται να ανατρέξει στο βιβλίο των Δομών Δεδομένων για λεπτομέρειες σχετικά με τον αλγόριθμο συγχώνευσης δομών κύριας μνήμης. Στο παρόν κεφάλαιο θα δοθεί έμφαση στις συγχωνεύσεις κάτω από ένα νέο πρίσμα κοστολόγησης, δηλαδή από την άποψη της εκτίμησης του μεγέθους των δεδομένων που μεταφέρονται από το δίσκο στη μνήμη, και το αντίστροφο.

5.2 Φυσική συγχώνευση

Βαθμός (degree) της συγχώνευσης είναι ο αριθμός των αρχείων που πρόκειται να συγχωνευθούν. Το ιδανικό θα ήταν να υπήρχαν τόσες διαθέσιμες συσκευές όσες και τα ταξινομημένα τμήματα. Έτσι με μία συγχώνευση ισάριθμων δρόμων η εξωτερική ταξινόμηση θα τελειώνει. Αυτή η περίπτωση είναι ιδεατή γιατί δεν είναι δυνατόν:

- να κρατούνται ανοικτά πάρα πολλά αρχεία, και
- να υπάρχουν διαθέσιμες τόσες πολλές συσκευές μαγνητικών ταινιών.

Σε μία φυσική συγχώνευση P δρόμων (P -way natural merge) υπάρχουν P συσκευές στην είσοδο και μία συσκευή στην έξοδο. Έτσι, συνολικά απαιτούνται $P+1$ συσκευές.

Έστω ότι αρχικά υπάρχουν nsg ταξινομημένα τμήματα συνολικού μεγέθους ίσου με το μέγεθος της κύριας μνήμης. Ας σημειωθεί ότι στην αγγλική βιβλιογραφία τα ταξινομημένα τμήματα αναφέρονται ως runs ή σπανιότερα ως strings. Επίσης, αρχικά κάθε ταξινομημένο τμήμα περιέχει ένα σταθερό αριθμό εγγραφών σταθερού μήκους. Τα ταξινομημένα αυτά τμήματα κατανομούνται με κυκλικό τρόπο στις P συσκευές κατά τη δημιουργία τους.

Η συγχώνευση αρχίζει λαμβάνοντας από κάθε μία από τις P συσκευές ένα ταξινομημένο τμήμα και δημιουργώντας ένα ταξινομημένο τμήμα μεγέθους P φορές μεγαλύτερο από το αρχικό. Το τμήμα αυτό αποθηκεύεται στην $(P+1)$ -οστή συσκευή. Η διαδικασία συνεχίζεται με τη διαδοχική συγχώνευση P τμημάτων, ανά ένα από τις P συσκευές, και τη δημιουργία νέων τμημάτων μεγαλύτερου μεγέθους. Όταν εξαντληθούν όλα τα τμήματα του αρχικού μεγέθους, το αποτέλεσμα είναι να υπάρχουν $\lceil nsg/P \rceil$ ταξινομημένα

τιμήματα περίπου στην $(P+1)$ -οστή συσκευή. Τα τμήματα αυτά κατανέμονται και πάλι εξίσου στις P συσκευές κατά κυκλικό τρόπο. Στη συνέχεια οι φάσεις επαναλαμβάνονται κατά παρόμοιο τρόπο μέχρι να προκύψει ένα μόνο ταξινομημένο τμήμα στη συσκευή εξόδου.

Συσκευή 1	Συσκευή 2	Συσκευή 3
6 × 100	6 × 100	–
–	–	6 × 200
3 × 200	–	3 × 200
–	3 × 400	–
1 × 400	2 × 400	–
–	1 × 400	1 × 800
1 × 1200	–	–

Πίνακας 5.1: Φυσική συγχώνευση δύο δρόμων.

Το παράδειγμα του Πίνακα 5.1 παρουσιάζει τη μέθοδο φυσικής συγχώνευσης δύο δρόμων με σκοπό την εξωτερική ταξινόμηση 1200 εγγραφών που κατανέμονται σε 12 ταξινομημένα τμήματα των 100 εγγραφών. Το περιεχόμενο των συσκευών φαίνεται στις κατακόρυφες στήλες, ενώ οι διαδοχικές συγχωνεύσεις και ανακατανομές φαίνονται στην οριζόντια διάσταση. Πιο συγκεκριμένα, κάθε γινόμενο δηλώνει το πλήθος των ταξινομημένων τμημάτων και το μέγεθός τους σε εγγραφές. Στον Πίνακα 5.2 τα ίδια δεδομένα ταξινομούνται με τη μέθοδο της φυσικής συγχώνευσης τριών δρόμων. Η βελτίωση της επίδοσης είναι προφανής.

Συσκευή 1	Συσκευή 2	Συσκευή 3	Συσκευή 4
4 × 100	4 × 100	4 × 100	–
–	–	–	4 × 300
1 × 300	1 × 300	–	2 × 300
–	–	1 × 900	1 × 300
1 × 1200	–	–	–

Πίνακας 5.2: Φυσική συγχώνευση τριών δρόμων.

Με βάση όσα αναφέρθηκαν προηγουμένως, εύκολα προκύπτει ότι κάθε φάση διαρκεί λιγότερο από μία σειριακή ανάγνωση του αρχείου. Ωστόσο, επειδή η ταξινόμηση απαιτεί πολλές φάσεις, κάθε τμήμα υφίσταται επεξεργασία αρκετές φορές. Ως **πέρασμα** (pass) ορίζεται ο λόγος του συνολικού

αριθμού των προσπελάσεων των εγγραφών προς το συνολικό αριθμό των εγγραφών του αρχείου. Με άλλα λόγια ο αριθμός των περασμάτων δίνει το μέσο όρο αναγνώσεων μίας εγγραφής κατά τη συγχώνευση. Για τη φυσική συγχώνευση 2 δρόμων του πρώτου παραδείγματος απαιτούνται 4,5 περάσματα, ενώ για τη φυσική συγχώνευση 3 δρόμων του δεύτερου παραδείγματος απαιτούνται 3,25 περάσματα. Η εύρεση των αποτελεσμάτων αυτών αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη.

Στη συνέχεια θα δοθεί αναλυτική έκφραση του απαιτούμενου χρόνου για μία φυσική συγχώνευση P δρόμων. Ο αριθμός των φάσεων όπου εκτελείται συγχώνευση είναι $\lceil \log_P nsg \rceil$. Βέβαια, κάθε φάση συγχώνευσης (εκτός από την τελευταία) ακολουθείται από μία φάση ανακατανομής. Συνεπώς, συνολικά απαιτούνται $2\lceil \log_P nsg \rceil - 1$ φάσεις. Στον αριθμό αυτό πρέπει να συνυπολογισθεί και άλλη μία φάση, αυτή της δημιουργίας των ταξινομημένων τμημάτων. Άρα, ο συνολικός απαιτούμενος χρόνος ισούται με:

$$2 \times 2^{\lceil \log_P nsg \rceil} \times \left(\frac{Ibg}{Spd} + \frac{Buf}{(P+1) \times Spd \times Den} \right) \times \frac{n \times R}{\frac{Buf}{P+1}}$$

όπου Buf είναι το μέγεθος της απομονωτικής μνήμης. Ο τελευταίος όρος του γινομένου ερμηνεύεται ως εξής. Η διαθέσιμη απομονωτική μνήμη, Buf , επιμερίζεται σε $P+1$ τμήματα για την προσωρινή αποθήκευση των δεδομένων εισόδου/εξόδου. Συνεπώς, ο αριθμός των φορών που θα γεμίσει η μνήμη είναι $\frac{n \times R}{\frac{Buf}{P+1}}$. Ο χρόνος που απαιτείται κάθε φορά που γεμίζει ένα τμήμα της μνήμης δίνεται από τη σχετική παρένθεση. Επίσης, σημειώνεται ότι ο πρώτος συντελεστής 2 εισάγεται, ώστε να αποδοθεί ο χρόνος ανάγνωσης και ο χρόνος αποθήκευσης.

Σοβαρό μειονέκτημα της μεθόδου είναι ότι, όταν τελειώνει μία φάση συγχώνευσης, απαιτείται ανακατανομή μεγάλων ταξινομημένων τμημάτων σε άλλες συσκευές. Αυτή η ανακατανομή αποτελεί το μισό περίπου κόστος της μεθόδου και είναι μία μη παραγωγική διαδικασία, γιατί τα δεδομένα διαβάζονται και αποθηκεύονται χωρίς να υφίστανται κάποια επεξεργασία. Η επόμενη μέθοδος εξωτερικής ταξινόμησης δεν χαρακτηρίζεται από αυτό το μειονέκτημα.

5.3 Ισοζυγισμένη συγχώνευση

Η ισοζυγισμένη συγχώνευση P -δρόμων (P -way balanced merge) χρησιμοποιεί P συσκευές στην είσοδο και P συσκευές στην έξοδο, δηλαδή

συνολικά $2P$ συσκευές. Και πάλι τα αρχικά ταξινομημένα τμήματα κατανέμονται κυκλικά στις P συσκευές εισόδου. Η ύπαρξη όμως P συσκευών στην έξοδο συντελεί στην αποφυγή των διαδοχικών απαιτούμενων ανακατανομών, όπως στη φυσική συγχώνευση. Αυτό επιτυγχάνεται εναλλάσσοντας κάθε φορά το ρόλο των συσκευών εισόδου με το ρόλο των συσκευών εξόδου. Η μέθοδος είναι ισοζυγισμένη υπό την έννοια ότι σε κάθε συγχώνευση τα ταξινομημένα τμήματα κατανέμονται σε ίσο αριθμό στις συσκευές εξόδου. Στον Πίνακα 5.3 φαίνεται ένα παράδειγμα ισοζυγισμένης συγχώνευσης δύο δρόμων, όπου το αρχείο αποτελείται από 12 ταξινομημένα τμήματα των 100 εγγραφών. Στη παράδειγμα αυτό απαιτούνται 3,67 περάσματα.

Συσκευή 1	Συσκευή 2	Συσκευή 3	Συσκευή 4
6×100	6×100	–	–
–	–	3×200	3×200
2×400	1×400	–	–
1×400	–	1×800	–
–	1×1200	–	–

Πίνακας 5.3: Ισοζυγισμένη συγχώνευση δύο δρόμων.

Κατά την ισοζυγισμένη συγχώνευση απαιτούνται $\lceil \log_P nsg \rceil$ φάσεις συγχώνευσης συν μία φάση δημιουργίας των αρχικών ταξινομημένων τμημάτων. Έτσι ο απαιτούμενος χρόνος για είσοδο/έξοδο των δεδομένων είναι:

$$2 \times \lceil \log_P nsg \rceil \times \left(\frac{Ibg}{Spd} + \frac{Buf}{2P \times Spd \times Den} \right) \times \frac{n \times R}{2P}$$

Η έκφραση αυτή ερμηνεύεται ακολουθώντας το σκεπτικό της αντίστοιχης έκφρασης για τη φυσική συγχώνευση, και με βάση το γεγονός ότι δεν εκτελούνται αναδιανομές των ταξινομημένων τμημάτων (άρα, δεν χρειάζεται ο συντελεστής 2), ενώ η απομονωτική μνήμη χωρίζεται σε $2P$ τμήματα για την προσωρινή αποθήκευση των δεδομένων εισόδου/εξόδου.

Η μέθοδος αυτή είναι απλή στην υλοποίησή της, αλλά υπάρχουν σημαντικά περιθώρια βελτίωσης. Επίσης, γίνεται αντιληπτό ότι η ισοζυγισμένη συγχώνευση μπορεί να εφαρμοσθεί και στην περίπτωση όπου ο αριθμός των συσκευών εισόδου δεν ισούται με τον αριθμό των συσκευών εξόδου.

5.4 Πολυφασική συγχώνευση

Το μειονέκτημα της προηγούμενης μεθόδου είναι ότι, αν και απαιτεί $2P$ συσκευές, σε κάθε χρονική στιγμή μόνο $P+1$ χρησιμοποιούνται, ενώ οι υπόλοιπες παραμένουν αδρανείς. Έτσι προέκυψε μία νέα μέθοδος συγχώνευσης που δεν είναι ισοζυγισμένη, αλλά δεν διακρίνεται από περιττές ανακατανομές τμημάτων, όπως συμβαίνει στη φυσική συγχώνευση. Η μέθοδος αυτή ονομάζεται **πολυφασική συγχώνευση P δρόμων** (P -way polyphase merge) και χρησιμοποιεί P συσκευές για είσοδο και 1 για έξοδο. 'Νονός' της μεθόδου ήταν ο Gilstad που περιέγραψε το γενικό πρότυπο το 1960, αν και η μέθοδος είχε ήδη προταθεί από τον Betz το 1956 (αλλά μόνο για τρεις ταινίες). Η βασική διαφορά της συγχώνευσης αυτής σε σχέση με τις προηγούμενες είναι ότι τα ταξινομημένα τμήματα δεν κατανέμονται εξίσου στις συσκευές εισόδου, αλλά εφαρμόζεται ένας βέλτιστος τρόπος κατανομής των τμημάτων ώστε να διευκολύνονται οι κατοπινές φάσεις.

Έστω, λοιπόν, ότι υπάρχουν διαθέσιμες $P+1$ συσκευές δίσκων. Σε κάθε φάση η μέθοδος αυτή συγχωνεύει ταξινομημένα τμήματα από P συσκευές και τα αποθηκεύει σε αυτήν που απομένει. Έτσι, στο τέλος κάθε φάσης μία συσκευή αδειάζει από δεδομένα και καθίσταται η νέα έξοδος. Εν τέλει, το ιδανικό είναι κατά την τελευταία φάση σε κάθε συσκευή να υπάρχει ένα μοναδικό τμήμα που να υπεισέρχεται σε μία συγχώνευση P δρόμων. Για να επιτευχθεί ο στόχος αυτός (δηλαδή, στην τελευταία φάση σε κάθε συσκευή να υπάρχει ένα και μόνον ένα ταξινομημένο τμήμα), χρησιμοποιείται μία έξυπνη αρχική κατανομή των ταξινομημένων τμημάτων στις P συσκευές που στηρίζεται στους αριθμούς Fibonacci. Η ακολουθία των αριθμών Fibonacci τάξης P ορίζεται ως εξής:

$$F_i = \begin{cases} 0 & \text{αν } 0 \leq i < P - 1 \\ 1 & \text{αν } i = P - 1 \\ \sum_{j=i-P}^{i-1} F_j & \text{αν } i > P - 1 \end{cases}$$

Σύμφωνα με την αρχική έξυπνη κατανομή ο αριθμός των ταξινομημένων τμημάτων της i -οστής συσκευής ($1 \leq i \leq P$) δίνεται από το άθροισμα:

$$F_{l+P-2} + F_{l+P-1} + \dots + F_{l+i-3} = \sum_{j=i}^P F_{l+j-2}$$

όπου l είναι το επίπεδο (level) της φάσης. Συνεπώς, ο συνολικός αριθμός των αρχικών ταξινομημένων τμημάτων είναι:

$$S_l = P \times F_{l+P-2} + (P - 1) \times F_{l+P-3} + \dots + F_{l-1}$$

Προφανώς καθώς το l αυξάνει, αυξάνει και το S_l . Μάλιστα οι όροι της ακολουθίας S_l προκύπτουν, όπως ο γενικός όρος της ακολουθίας Fibonacci. Έτσι η ακολουθία αυτή αποκαλείται 'γενικευμένη ακολουθία Fibonacci'. Για παράδειγμα, έστω ότι διατίθενται $P+1=5$ ταινίες, άρα οι υπολογισμοί θα γίνουν με αριθμούς Fibonacci τέταρτης τάξης. Είναι εύκολο να υπολογισθεί η ακολουθία αυτών των αριθμών Fibonacci: 0, 0, 0, 1, 1, 2, 4, 8, 15, 29, 56 κλπ. Στον Πίνακα 5.4 φαίνεται η κατανομή των ταξινομημένων τμημάτων για επίπεδα $1 \leq l \leq 5$. Η αντίστοιχη γενικευμένη ακολουθία Fibonacci είναι 4, 7, 13, 25, 49, 94 κλπ.

l	Συσκευή 1	Συσκευή 2	Συσκευή 3	Συσκευή 4	S_l
1	$F_3 + F_2 + F_1 + F_0$	$F_3 + F_2 + F_1$	$F_3 + F_2$	F_3	4
2	$F_4 + F_3 + F_2 + F_1$	$F_4 + F_3 + F_2$	$F_4 + F_3$	F_4	7
3	$F_5 + F_4 + F_3 + F_2$	$F_5 + F_4 + F_3$	$F_5 + F_4$	F_5	13
4	$F_6 + F_5 + F_4 + F_3$	$F_6 + F_5 + F_4$	$F_6 + F_5$	F_6	25
5	$F_7 + F_6 + F_5 + F_4$	$F_7 + F_6 + F_5$	$F_7 + F_6$	F_7	49
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

Πίνακας 5.4: Κατανομή ταξινομημένων τμημάτων.

Στη γενική περίπτωση, λοιπόν, δοθέντος ενός αριθμού S αρχικών ταξινομημένων τμημάτων πρέπει να βρεθεί ο μικρότερος δυνατός αριθμός S_l με τιμή μεγαλύτερη ή ίση με S . Αν οι αριθμοί S και S_l είναι άνισοι, τότε θεωρούνται εικονικά τμήματα για να γίνει η προβλεπόμενη έξυπνη κατανομή των ταξινομημένων τμημάτων. Σχετικά με τα εικονικά τμήματα θα γίνει αναφορά αργότερα και προς το παρόν υποθέτουμε ότι δίνεται ένας βολικός αριθμός. Σε μία τέλεια πολυφασική συγχώνευση P δρόμων ο αρχικός αριθμός ταξινομημένων τμημάτων πρέπει να ισούται με κάποιον γενικευμένο αριθμό Fibonacci τάξης P . Με άλλα λόγια ισχύει ο εξής γενικός κανόνας: 'Σε μία τέλεια πολυφασική συγχώνευση P δρόμων πρέπει ο αριθμός των ταξινομημένων τμημάτων να ισούται με το άθροισμα κάθε $P, P-1, \dots, 1$ διαδοχικών αριθμών Fibonacci τάξης P '.

Στον Πίνακα 5.5 παρουσιάζεται ένας πρακτικός τρόπος εύρεσης της βέλτιστης κατανομής. Ας υποθεθεί ότι το αρχείο αποτελείται από 49 ταξινομημένα τμήματα των 100 εγγραφών και ότι οι διαθέσιμες συσκευές εισόδου είναι τέσσερις (συν μία για την έξοδο). Στην οριζόντια διάσταση του πίνακα δίνεται το περιεχόμενο της κάθε μίας συσκευής, ενώ στις κατακόρυφες στήλες παρουσιάζεται για κάθε κύκλο το περιεχόμενο κάθε συσκευής, καθώς

Συσκευή 1	0	1	1	3	7	15	...
Συσκευή 2	0	1	2	2	6	14	...
Συσκευή 3	0	1	2	4	4	12	...
Συσκευή 4	1	1	2	4	8	8	...
Άθροισμα	1	4	7	13	25	49	...

Πίνακας 5.5: Κατανομή ταξινομημένων τμημάτων.

και το σύνολο των ταξινομημένων τμημάτων σε όλες τις συσκευές. Έτσι φαίνεται ότι στον πρώτο κύκλο αποθηκεύεται από ένα τμήμα σε κάθε συσκευή. Στο δεύτερο κύκλο αποθηκεύονται στη δεύτερη, τρίτη και τέταρτη συσκευή τόσα τμήματα όσα είναι τα αποθηκευμένα τμήματα στην πρώτη συσκευή από τον προηγούμενο κύκλο. Έτσι με το πέρας του δεύτερου κύκλου το περιεχόμενο των τεσσάρων συσκευών είναι 1, 2, 2 και 2 τμήματα, αντίστοιχα. Στον τρίτο κύκλο αποθηκεύονται στην τρίτη, στην τέταρτη και στην πρώτη συσκευή τόσα τμήματα όσα είναι τα αποθηκευμένα τμήματα στη δεύτερη συσκευή από τον προηγούμενο κύκλο. Έτσι με το πέρας του τρίτου κύκλου το περιεχόμενο των τεσσάρων συσκευών είναι 3, 2, 4 και 4 τμήματα, αντίστοιχα. Προχωρώντας κατά παρόμοιο τρόπο προκύπτει ότι με το πέρας του τέταρτου κύκλου έχουν κατανεμηθεί 15, 14, 12 και 8 τμήματα στις τέσσερις συσκευές αντίστοιχα, δηλαδή συνολικά 49 ταξινομημένα τμήματα. Στον Πίνακα 5.6 φαίνεται το γενικό πρότυπο ανάπτυξης των γενικευμένων αριθμών Fibonacci για πολυφασική συγχώνευση τεσσάρων δρόμων.

l	Συσκευή 1	Συσκευή 2	Συσκευή 3	Συσκευή 4	S_l
0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	4
2	2	2	2	1	7
3	4	4	3	2	13
4	8	7	6	4	25
5	15	14	12	8	49
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
n	a	b	c	d	t
$n+1$	$a+b$	$a+c$	$a+d$	a	$t+3a$

Πίνακας 5.6: Πρότυπο ανάπτυξης γενικευμένων αριθμών Fibonacci.

Στον Πίνακα 5.7 παρουσιάζεται η διαδικασία της πολυφασικής συγχώ-

Συσκευή 1	Συσκευή 2	Συσκευή 3	Συσκευή 4	Συσκευή 5
15 × 100	14 × 100	12 × 100	8 × 100	–
7 × 100	6 × 100	4 × 100	–	8 × 400
3 × 100	2 × 100	–	4 × 700	4 × 400
1 × 100	–	2 × 1300	2 × 700	2 × 400
–	1 × 2500	1 × 1300	1 × 700	1 × 400
1 × 4900	–	–	–	–

Πίνακας 5.7: Πολυφασική συγχώνευση τεσσάρων δρόμων.

νευσης τεσσάρων δρόμων για 49 αρχικά ταξινομημένα τμήματα, όπου κάθε γραμμή αντιστοιχεί σε μία φάση. Η σύμπτωση του αριθμού των ταξινομημένων τμημάτων ανά συσκευή σε κάθε φάση με τις αντίστοιχες τιμές του Πίνακα 5.6 δεν είναι τυχαία. Εύκολα προκύπτει ότι ο αριθμός των περασμάτων είναι $160/49 \approx 3,27$. Αν ο αναγνώστης δοκιμάσει να εφαρμόσει τους δύο προηγούμενους αλγόριθμους με τα ίδια δεδομένα, τότε θα διαπιστώσει σημαντική βελτίωση της επίδοσης. Ο Knuth έφθασε σε αναλυτικές εκφράσεις για την εύρεση του αριθμού των φάσεων και των περασμάτων σε συνάρτηση με το βαθμό της πολυφασικής συγχώνευσης. Τα αποτελέσμα-

P	Φάσεις	Περάσματα ($PN(P)$)	Περάσματα/ Φάσεις
2	$2,078 \times \ln nsg + 0,672$	$1,504 \times \ln nsg + 0,992$	72%
3	$1,641 \times \ln nsg + 0,374$	$1,015 \times \ln nsg + 0,965$	62%
4	$1,524 \times \ln nsg + 0,078$	$0,863 \times \ln nsg + 0,921$	57%
5	$1,479 \times \ln nsg + 0,185$	$0,795 \times \ln nsg + 0,864$	54%
6	$1,460 \times \ln nsg + 0,424$	$0,762 \times \ln nsg + 0,797$	52%
7	$1,451 \times \ln nsg + 0,642$	$0,744 \times \ln nsg + 0,723$	51%
8	$1,447 \times \ln nsg + 0,838$	$0,734 \times \ln nsg + 0,646$	51%
9	$1,445 \times \ln nsg + 1,017$	$0,728 \times \ln nsg + 0,568$	50%

Πίνακας 5.8: Αριθμός περασμάτων σε πολυφασική συγχώνευση.

τα αυτά συνοψίζονται στον Πίνακα 5.8, όπου φαίνεται επίσης το ποσοστό επεξεργασίας του αρχείου ως πηλίκο του αριθμού των περασμάτων δια του αριθμού των φάσεων. Συνεπώς, ο απαιτούμενος χρόνος για είσοδο/έξοδο των δεδομένων ισούται με:

$$2 \times PN(P) \times \left(\frac{Ibg}{Spd} + \frac{Buf}{(P+1) \times Spd \times Den} \right) \times \frac{n \times R}{P+1}$$

όπου ο όρος $PN(P)$ δίνει τον αριθμό των περασμάτων ως συνάρτηση του P .

Επισημαίνεται και πάλι ότι αν ο αρχικός αριθμός ταξινομημένων τμημάτων δεν ανήκει στην αντίστοιχη ακολουθία Fibonacci, τότε πρέπει να θεωρηθούν εικονικά ταξινομημένα τμήματα. Τα εικονικά αυτά τμήματα δεν είναι παρά κάποιιοι μετρητές στον κώδικα της μεθόδου. Από τον αλγόριθμο επίσης φαίνεται ότι τα τελευταία τμήματα κάθε συσκευής υφίστανται λιγότερη επεξεργασία. Συνεπώς, η επίδοση βελτιώνεται αν τα εικονικά τμήματα κατανεμηθούν εξίσου στις διαθέσιμες συσκευές εισόδου και μάλιστα αποθηκευθούν (θεωρητικά) εμπρός από τα πραγματικά τμήματα. Έτσι η προσθήκη των εικονικών αυτών τμημάτων δεν επιβαρύνει τη μέθοδο ούτε με περισσότερες φάσεις, ούτε με περισσότερη δραστηριότητα εισόδου/εξόδου.

5.5 Συγχώνευση καταρράκτη

Μία άλλη μη ισοζυγισμένη συγχώνευση είναι η συγχώνευση καταρράκτη (cascade merge), που προτάθηκε από τους Betz και Carter το 1959, δηλαδή πριν την πολυφασική συγχώνευση. Και σε αυτή τη μέθοδο, μία έξυπνη αρχική κατανομή των ταξινομημένων τμημάτων βελτιστοποιεί την επίδοσή της. Η συγχώνευση αυτή, λοιπόν, αρχίζει λαμβάνοντας ταξινομημένα τμήματα από τις P συσκευές και αποθηκεύοντας τα προκύπτοντα τμήματα στην $(P+1)$ -οστή συσκευή. Όταν μία από τις P συσκευές αδειάσει, τότε η διαδικασία συνεχίζεται λαμβάνοντας τμήματα από τις $P-1$ συσκευές και αποθηκεύοντας τα προκύπτοντα τμήματα στη συσκευή που μόλις άδειασε. Με τον τρόπο αυτό συνεχίζεται η διαδικασία μέχρις ότου από δύο συσκευές εισόδου τα αποτελέσματα να κατευθύνονται σε μία συσκευή εξόδου. Έτσι στο σημείο αυτό ταξινομημένα τμήματα υπάρχουν σε P συσκευές και η διαδικασία συνεχίζεται με τον ίδιο τρόπο. Δηλαδή, ο βαθμός της συγχώνευσης δεν διατηρείται σταθερός, αλλά μεταβάλλεται κυκλικά από P ως 2. Στον Πίνακα 5.9 φαίνεται η μεθοδολογία εύρεσης της βέλτιστης κατανομής ταξινομημένων τμημάτων για μία συγχώνευση καταρράκτη πέντε δρόμων.

Για παράδειγμα, έστωσαν 190 ταξινομημένα τμήματα των 1000 εγγράφων, που πρόκειται να ταξινομηθούν με τη μέθοδο αυτή. Στον Πίνακα 5.10 φαίνεται η διαδικασία των διαδοχικών συγχωνεύσεων. Και πάλι η αντιστοιχία των περιεχομένων των συσκευών με τη μέθοδο της εύρεσης της βέλτιστης κατανομής είναι προφανής. Είναι εύκολο για τον αναγνώστη να

l	Συσκ. 1	Συσκ. 2	Συσκ. 3	Συσκ. 4	Συσκ. 5	S_l
0	1	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	5
2	5	4	3	2	1	15
3	15	14	12	9	5	55
4	55	50	41	29	15	190
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
n	a	b	c	d	e	
$n+1$	$\left\{ \begin{array}{l} a+b+c \\ +d+e \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} a+b+ \\ c+d \end{array} \right\}$	$a+b+c$	$a+b$	a	

Πίνακας 5.9: Ανάπτυξη βέλτιστης κατανομής για συγχώνευση καταρράκτη.

Συσκευή 1	Συσκευή 2	Συσκευή 3	Συσκευή 4	Συσκευή 5	Συσκευή 6
55×1	50×1	41×1	29×1	15×1	–
40×1	35×1	26×1	14×1	–	15×5
26×1	21×1	12×1	–	14×4	
14×1	9×1	–	12×3		
5×1	–	9×2			
–	5×15	4×2	7×3	9×4	10×5
4×14		–	3×3	5×4	6×5
		3×2	–	2×4	3×5
			2×9	–	1×5
3×14	4×15	2×12	1×9	1×55	–
2×14	3×15	1×12	–		1×50
1×14	2×15	–	1×41		
–	1×15	1×29			
1×190	–	–	–	–	–

Πίνακας 5.10: Συγχώνευση καταρράκτη πέντε δρόμων.

διαπιστώσει ότι ο αριθμός των περασμάτων είναι $735/190 \approx 3,87$. Αν ο αριθμός των αρχικών ταξινομημένων τμημάτων δεν είναι βολικός (όπως το 190), τότε θεωρούνται εικονικά τμήματα όπως και στην πολυφασική μέθοδο. Ο Knuth έφθασε σε αναλυτικές εκφράσεις για τον αριθμό των φάσεων και των περασμάτων ως συνάρτηση του βαθμού της συγχώνευσης. Ο Πίνακας 5.11 συνοψίζει τα αποτελέσματα αυτά.

P	Περάσματα
2	$1,504 \times \ln nsg + 0,992$
3	$1,102 \times \ln nsg + 0,820$
4	$0,897 \times \ln nsg + 0,800$
5	$0,773 \times \ln nsg + 0,808$
6	$0,691 \times \ln nsg + 0,882$
7	$0,632 \times \ln nsg + 0,834$
8	$0,587 \times \ln nsg + 0,845$
9	$0,552 \times \ln nsg + 0,854$

Πίνακας 5.11: Αριθμός περασμάτων σε συγχώνευση καταρράκτη.

Στο σημείο αυτό αναφέρεται ότι από τον Knuth προτάθηκε το 1963 μία υβριδική μέθοδος μεταξύ πολυφασικής και καταρράκτη. Πιο συγκεκριμένα, σε κάθε φάση της μεθόδου του καταρράκτη δεν εκτελούνται συγχωνεύσεις από P δρόμους μέχρι 2 δρόμους, αλλά από P μέχρι r δρόμους, όπου το r είναι παράμετρος. Στον Πίνακα 5.12 φαίνεται το βέλτιστο r για μερικές τιμές του P . Δηλαδή, για $P=2$ ή 3 η υβριδική αυτή μέθοδος ταυτίζεται με την πολυφασική, ενώ για $P \geq 14$ η μέθοδος ταυτίζεται με τον καταρράκτη.

P	2, 3	4, 5	6	10	14
r	2	3	4	8	14

Πίνακας 5.12: Βέλτιστο r υβριδικής μεθόδου.

Συμπερασματικά λοιπόν, θεωρώντας ως κριτήριο επίδοσης τον όγκο των δεδομένων που μεταφέρονται από/προς τη συσκευή της ταινίας, ισχύουν οι εξής παρατηρήσεις:

- όσο μεγαλύτερος είναι ο βαθμός της συγχώνευσης, τόσο μικρότερος είναι ο αριθμός των περασμάτων,
- σημασία έχει το μέγεθος του αρχείου και όχι το πλήθος των εγγραφών ή το μέγεθος της εγγραφής,
- όσο μεγαλύτερη είναι η κύρια μνήμη τόσο η επίδοση βελτιώνεται, γιατί δημιουργούνται λιγότερα και μεγαλύτερα ταξινομημένα τμήματα,
- γενικά, η λιγότερο αποτελεσματική μέθοδος είναι η φυσική συγχώνευση, η πολυφασική μέθοδος είναι καλύτερη από την ισοζυγισμένη

όταν οι διαθέσιμες συσκευές είναι λιγότερες από 9, ενώ η συγχώνευση καταρράκτη είναι καλύτερη από την πολυφασική για περισσότερες από πέντε συσκευές.

Στα πλαίσια του κεφαλαίου αυτού έγινε αναφορά των κυριότερων αλγορίθμων και δόθηκε προσοχή στην εύρεση του αριθμού των φάσεων και των περασμάτων. Ωστόσο, ένας άλλος σημαντικός παράγοντας κόστους είναι ο χρόνος περιστροφής της ταινίας μετά το πέρας κάθε φάσης. Αξίζει πάντως να σημειωθεί ότι η μέθοδος του καταρράκτη επιτρέπει κάποια επικάλυψη του χρόνου επαναφοράς της ταινίας με το χρόνο των παραγωγικών συγχωνεύσεων. Πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι οι μέθοδοι αποχτούν νέο αλγοριθμικό και αναλυτικό ενδιαφέρον αν θεωρηθούν συσκευές με δυνατότητα ανάγνωσης/αποθήκευσης και κατά τις δύο φορές κίνησης. Μάλιστα για τις ταινίες αυτού του τύπου αναφέρεται μία ακόμη μέθοδος ταξινόμησης με πολύ καλή επίδοση, η *ταλαντευόμενη συγχώνευση* (oscillating merge), που προτάθηκε το 1962 από τον Sobel. Ένα άλλο ενδιαφέρον πρόβλημα είναι η εύρεση αλγορίθμων εξωτερικής ταξινόμησης, όταν είναι διαθέσιμες συνολικά δύο ή και μόνο μία περιφερειακή συσκευή. Για τις δύο αυτές περιπτώσεις, μάλιστα, έχει αποδειχθεί ότι δεν μπορεί να κατασκευασθεί αλγόριθμος μικρότερης πολυπλοκότητας από $O(n \log n)$ και $O(n^2)$, αντίστοιχα. Το θέμα της ταξινόμησης με ταινίες έχει πλούσια βιβλιογραφία αλλά δεν είναι πλέον καυτό θέμα για την Πληροφορική. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να βρει πλούσιο υλικό στον τρίτο τόμο του έργου του Knuth 'The art of computer programming: sorting and searching'.

5.6 Ασκήσεις

<1> Δοθεισών $2P$ ταινιών, ισοζυγισμένη συγχώνευση μπορεί να γίνει θεωρώντας αρχικά X συσκευές εισόδου και $2P-X$ συσκευές εξόδου, ενώ στη συνέχεια ο ρόλος τους αντιστρέφεται. Να βρεθεί η επίδοση της μεθόδου ως συνάρτηση του X και η βέλτιστη τιμή του X .

<2> Έστωσαν 14 εγγραφές με κλειδιά 6, 29, 1, 10, 23, 48, 17, 13, 16, 12, 11, 7, 2 και 3. Να υποτεθεί ότι τα αρχικά ταξινομημένα τμήματα περιέχουν μόνο μία εγγραφή και να εφαρμοσθεί η:

- φυσική συγχώνευση δύο δρόμων,
- ισοζυγισμένη συγχώνευση δύο δρόμων,

- ισοζυγισμένη συγχώνευση τριών δρόμων, και
- πολυφασική ταξινόμηση τριών δρόμων.

Για κάθε περίπτωση να φανεί η δομή του αρχείου μετά από κάθε φάση.

<3> Να δημιουργηθούν πίνακες με το περιεχόμενο των συσκευών για 31 ταξινομημένα τμήματα και για τις περιπτώσεις:

- φυσική συγχώνευση δύο δρόμων,
- ισοζυγισμένη συγχώνευση δύο δρόμων,
- ισοζυγισμένη συγχώνευση τριών δρόμων, και
- πολυφασική ταξινόμηση δύο δρόμων.

Να υπολογισθεί για κάθε περίπτωση ο αριθμός των φάσεων και των περασμάτων.

<4> Να εφαρμοσθεί η πολυφασική συγχώνευση τεσσάρων δρόμων σε 100 ταξινομημένα τμήματα των 100 εγγραφών θεωρώντας εικονικά τμήματα, ώστε να βρεθεί ένας γενικευμένος αριθμός Fibonacci. Να δοκιμασθούν οι εξής περιπτώσεις:

- τα εικονικά τμήματα τίθενται εμπρός από τα πραγματικά,
- τα εικονικά τμήματα τίθενται μετά τα πραγματικά.

Τι παρατηρείτε όσον αφορά στην επίδοση της μεθόδου;

<5> Να δοκιμασθεί η πολυφασική συγχώνευση και η συγχώνευση καταρράκτη για μερικές τιμές του αριθμού των αρχικών τμημάτων (για παράδειγμα $n_{sg} = 100, 150, 200$) με σκοπό να βρεθεί για ποιόν αριθμό ταινιών ($P = 8, 9, 10, 11$) η μία μέθοδος είναι καλύτερη της άλλης.

<6> Ένα αρχείο αποτελείται από 2028 ταξινομημένα τμήματα των 4000 bytes. Το μέγεθος της εγγραφής είναι 200 bytes, ενώ το μέγεθος της απομονωτικής μνήμης είναι 16 Mb. Να υπολογισθεί ο απαιτούμενος χρόνος για είσοδο/έξοδο των δεδομένων κατά την εκτέλεση μίας ισοζυγισμένης συγχώνευσης P δρόμων ($P = 4, 8, 12, 16, 20, 24$). Δίνεται επίσης ότι το μήκος της ταινίας είναι 2400 πόδια, η πυκνότητα είναι 1600 bytes, το κενό έχει μήκος 0,6 ίντσες και η ταχύτητα είναι 10 πόδια/sec.

<7> Να θεωρηθούν τα δεδομένα της Άσκησης 6 και να υπολογισθεί ο απαιτούμενος χρόνος για πολυφασική συγχώνευση.