Κεφάλαιο 8

ΔΕΝΔΡΙΚΕΣ ΔΟΜΕΣ

8.1 Εισαγωγή

8.2 B-δένδρα

8.3 B*-δένδρα

8.4 B+-δένδρα

8.5 `Αλλες παραλλαγές των B-δένδρων

8.6 Ασκήσεις

Κεφάλαιο 8

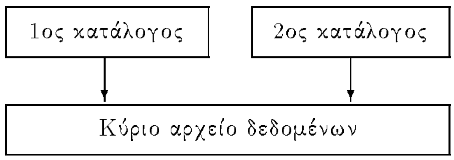
ΔΕΝΔΡΙΚΕΣ ΔΟΜΕΣ

8.1 Εισαγωγή

Ο κατάλογος είναι μία δομή που υλοποιεί μία συνάρτηση. Το όρισμα της συνάρτησης είναι η τιμή του κλειδιού και η τιμή της συνάρτησης είναι ο αριθμός της εγγραφής. Δηλαδή, είναι δυνατό με τη βοήθεια του καταλόγου να βρεθεί ο αριθμός (ή η θέση) μίας εγγραφής με βάση το κλειδί της. `Ενας άλλος τρόπος για την επίτευξη αυτού του σκοπού είναι η μέθοδος του κατακερματισμού, που δεν απαιτεί μία συγκεκριμένη δομή (όπως ο κατάλογος), αλλά υποφέρει από το πρόβλημα των συνωνυμιών (δες Κεφάλαιο 9 βιβλίου για Δομές Δεδομένων).

Γενικά, ο κατάλογος είναι ανεξάρτητος από το αρχείο κατά δύο έννοιες, λογικά αλλά και φυσικά. Στην περίπτωση του αρχείου ISAM ο κατάλογος είναι μόνο λογικά ανεξάρτητος, αφού φυσικά διαχέεται μέσα στην κύρια περιοχή. Το κόστος αναζήτησης στον κατάλογο είναι σχετικά μικρό, και βέβαια πολύ πιο μικρό από το κόστος αναζήτησης ολόκληρης της εγγραφής κατ΄ ευθείαν μέσα στο αρχείο. Σε έναν κατάλογο το κλειδί μπορεί είτε να είναι ένα μόνο χαρακτηριστικό, είτε ένα μέρος χαρακτηριστικού ή συνδυασμός πολλών χαρακτηριστικών. Μπορεί να υπάρχει μόνο ένας κατάλογος (όπως στο αρχείο ISAM), αλλά μπορεί να υπάρχουν και περισσότεροι του ενός κατάλογοι. Στο Σχήμα 8.1 παρουσιάζεται μία περίπτωση αρχείου με δύο διαφορετικούς ανεξάρτητους καταλόγους.

Το μήκος μίας εγγραφής καταλόγου πρέπει να κρατηθεί όσο το δυνατό μικρότερο. Σε απλούς καταλόγους κάθε εγγραφή αποτελείται από την



Σχήμα 8.1: Αρχείο με δύο ανεξάρτητους καταλόγους.

τιμή του κλειδιού και τον αντίστοιχο δείκτη, ενώ πιο σύνθετοι κατάλογοι περιέχουν και άλλα πεδία. Μικρές εγγραφές στον κατάλογο επιτρέπουν μεγαλύτερο συντελεστή ομαδοποίησης, οπότε έτσι επιτυγχάνεται οικονομία στο χώρο αποθήκευσης και στο χρόνο εισόδου/εξόδου των δεδομένων.

Ο απλούστερος τύπος καταλόγου είναι ο **γραμμικός κατάλογος** (linear index), όπως για παράδειγμα ο κατάλογος ενός βιβλίου. `Ενας γραμμικός κατάλογος περιέχει τις εγγραφές ταξινομημένες κατά αύξουσα τάξη χωρίς καμία άλλη δόμηση. `Ενας τέτοιος κατάλογος μπορεί να προσπελασθεί σειριακά, αλλά είναι αποτελεσματικότερο να προσπελασθεί με δυαδική αναζήτηση ή αναζήτηση άλματος. Μάλιστα, η τελευταία μέθοδος χρησιμοποιείται για την ικανοποίηση ερωτήσεων διαστήματος. Ο κατάλογος αυτός διατηρεί όλα τα μειονεκτήματα των σειριακών αρχείων, δηλαδή μη αποτελεσματικές μεθόδους εισαγωγής, διαγραφής και αναδιοργάνωσης.

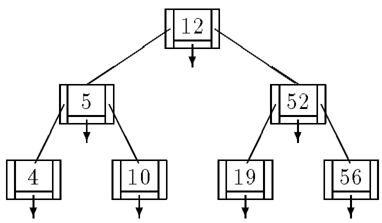
Δενδρικός κατάλογος (tree index) είναι ένας κατάλογος με συγκεκριμένη ιεραρχία επιπέδων. Η ρίζα του καταλόγου δεικτοδοτεί προς το δεύτερο επίπεδο του καταλόγου κοκ., ενώ το τελευταίο επίπεδο (δηλαδή τα φύλλα) περιέχουν δείκτες προς το αρχείο των δεδομένων. Προφανώς, ο κατάλογος των αρχείων ISAM, που εξετάσθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο, ικανοποιεί τον προηγούμενο ορισμό. Οι δενδρικοί κατάλογοι διακρίνονται σε δύο είδη: τα **ετερογενή** (heterogeneous) και τα **ομογενή** (homogeneous) δένδρα. Ετερογενή είναι τα δένδρα, των οποίων οι κόμβοι περιέχουν μόνο ένα είδος δεικτών. Οι κόμβοι των μεσαίων επιπέδων περιέχουν μόνο δείκτες σε κόμβους, ενώ οι κόμβοι του τελευταίου επιπέδου περιέχουν μόνο δείκτες σε δεδομένα. Αντίθετα, στα ομογενή δένδρα υπάρχουν δύο είδη δεικτών, οι **δείκτες δεδομένων** (data pointers) και οι **δενδρικοί δείκτες** (tree pointers). Στα μεσαία επίπεδα και οι δύο τύποι είναι ενεργοί, ενώ στο τελευταίο επίπεδο είναι ενεργοί μόνο οι δείκτες δεδομένων.

Στο Σχήμα 8.2 παρουσιάζεται η εσωτερική δομή ενός κόμβου ομογενούς δένδρου, όπου οι δενδρικοί δείκτες βρίσκονται μεταξύ των κλειδιών,

<table>
<tr><td rowspan="2">Δενδρικός δείκτης</td><td>Κλειδί</td><td rowspan="2">Δενδρικός δείκτης</td><td rowspan="2">...</td><td rowspan="2">Δενδρικός δείκτης</td><td>Κλειδί</td><td rowspan="2">Δενδρικός δείκτης</td></tr>
<tr><td>Δείκτης</td><td>Δείκτης</td></tr>
</table>

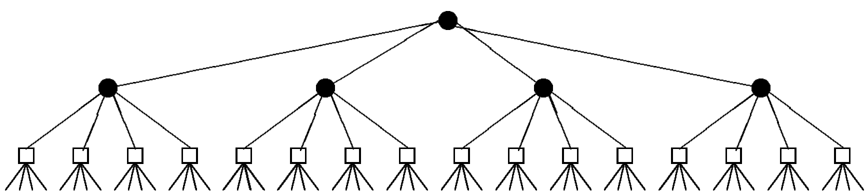
Σχήμα 8.2: Κόμβος ομογενούς δένδρου.

ενώ οι δείκτες δεδομένων βρίσκονται κάτω από τα κλειδιά. `Οπως φαίνεται, για κάθε κλειδί υπάρχει ένας δενδρικός δείκτης, ένας δείκτης δεδομένων και επιπλέον ένας ακόμη δενδρικός δείκτης. Ο πρώτος δενδρικός δείκτης κατευθύνει προς κλειδιά που είναι μικρότερα από το πρώτο κλειδί του κόμβου, ενώ ο τελευταίος δενδρικός δείκτης κατευθύνει προς κλειδιά μεγαλύτερα από το τελευταίο κλειδί του κόμβου. Κάθε άλλος δενδρικός δείκτης κατευθύνει προς κάποιον κόμβο του δένδρου με τιμές κλειδιών μεταξύ των τιμών των κλειδιών που περικλείουν το δείκτη. Σε περίπτωση επίσκεψης του κόμβου, όπου πραγματικά βρίσκεται αποθηκευμένο το αναζητούμενο κλειδί, τότε ο δείκτης δεδομένων κατευθύνει προς την αντίστοιχη εγγραφή.



Σχήμα 8.3: Ομογενές δένδρο.

Στα Σχήμα 8.3 και 8.4 παρουσιάζονται δύο παραδείγματα ομογενούς και ετερογενούς δένδρου, αντίστοιχα. Μία βασική διαφορά μεταξύ ετερογενών



Σχήμα 8.4: Ετερογενές δένδρο.

και ομογενών δένδρων είναι το ύψος του δένδρου, που έχει ως αποτέλεσμα διαφορετική επίδοση στην αναζήτηση. Η μέση τιμή προσπελάσεων για αναζήτηση είναι μεγαλύτερη για τα ετερογενή δένδρα, γιατί η αναζήτηση φθάνει οπωσδήποτε μέχρι τα φύλλα του δένδρου. Το σχετικό πλεονέκτημα των ομογενών δένδρων ισοζυγίζεται από τον επιπλέον απαιτούμενο χώρο για δείκτες.

Στο δένδρο του Σχήματος 8.4 ο λόγος διακλάδωσης είναι y=4, οπότε το δένδρο στα 3 επίπεδα του μπορεί να χωρέσει 64 κλειδιά. Γενικά, προκύπτει ότι το ύψος, h, του καταλόγου που δεικτοδοτεί n εγγραφές είναι:

$$h \;\geq\; \log_y n$$

Ένα ομογενές δένδρο με ύψος 3 και λόγο διακλάδωσης 4 μπορεί να αποθηκεύσει 63 κλειδιά. Γενικά σε ένα ομογενές δένδρο με h επίπεδα θα υπάρχουν (y–1) κλειδιά στη ρίζα, y(y–1) κλειδιά στο δεύτερο επίπεδο, y^2(y–1) κλειδιά στο τρίτο κοκ. Άρα, ο συνολικός αριθμός των εγγραφών που δεικτοδοτούνται θα είναι:

$$(y^0 + y^1 + y^2 + ... + y^{h-1}) \times (y-1) \;=\; y^h - 1$$

και συνεπώς:

$$n \;\leq\; y^h - 1 \iff h \;\geq\; \log_y(n+1)$$

Το δυσκολότερο μέρος της διαχείρισης ενός καταλόγου είναι η εισαγωγή και η διαγραφή χωρίς να καταστεί αναγκαία η γενική αναδιοργάνωση του καταλόγου. Για κάθε είδος καταλόγου υπάρχουν οι σχετικοί αλγόριθμοι. Στη συνέχεια θα εξετασθεί μία οικογένεια δένδρων, τα λεγόμενα B-δένδρα, που είναι η βασική δομή για καταλόγους. Τα δένδρα της οικογένειας αυτής χρησιμοποιούνται σε όλα σχεδόν τα εμπορικά συστήματα διαχείρισης βάσεων δεδομένων, όπως για παράδειγμα στο σύστημα της Oracle, της Sybase, στο DB2 της IBM, στο Ingres της Computer Associates, στο SQL Server της Microsoft κλπ κλπ. Οι δομές θα παρουσιασθούν με παραδείγματα και θα γίνει ανάλυση των χρονικών κόστων για τις διάφορες διεργασίες. Στο κεφάλαιο των ειδικών θεμάτων θα γίνει και πάλι αναφορά στις δομές αυτές στο πλαίσιο των προβλημάτων που δημιουργούνται κατά την ταυτόχρονη προσπέλασή τους από πολλούς χρήστες.

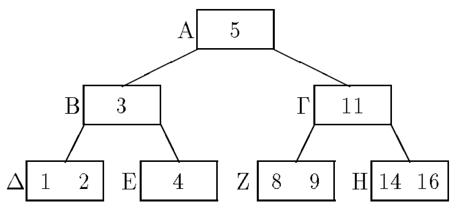
8.2 B-δένδρα

Η δομή αυτή προτάθηκε από τους Bayer και McCreight το 1972. Λέγεται ότι η ονομασία του δένδρου, το `B', προέρχεται από το επώνυμο του Bayer, ή από την ονομασία της εταιρείας Boeing όπου εργαζόταν ο Bayer, ή ακόμη ότι προέρχεται από τη λέξη balanced (ισοζυγισμένο). Το βέβαιο είναι ότι δεν προέρχεται από τη λέξη binary (δυαδικό).

Το B-δένδρο είναι μία μερική περίπτωση του δένδρου αναζητήσης m δρόμων (m-way search tree), που έχει αναπτυχθεί στο βιβλίο των Δομών Δεδομένων. Σύμφωνα με έναν ορισμό, ως **B-δένδρο τάξης** m ορίζεται το ομογενές δένδρο με τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

- η ρίζα έχει το ελάχιστο δύο παιδιά,
- οι εσωτερικοί κόμβοι (εκτός της ρίζας) έχουν το ελάχιστο $\lceil m/2 \rceil$ παιδιά και το μέγιστο m παιδιά,
- ένας εσωτερικός κόμβος με k κλειδιά έχει $k+1$ παιδιά, και
- οι εξωτερικοί κόμβοι βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.

Στη βιβλιογραφία συναντάται ένας παρόμοιος ορισμός του **B-δένδρου βαθμού** (degree) d, που διαφέρει από τον προηγούμενο μόνο στο δεύτερο σκέλος. Δηλαδή, οι εσωτερικοί κόμβοι, εκτός της ρίζας, περιέχουν το ελάχιστο d κλειδιά και το μέγιστο $2d$ κλειδιά. Προφανώς ο δεύτερος ορισμός είναι μερική περίπτωση του πρώτου. Το B-δένδρο του Σχήματος 8.5 είναι τρίτης τάξης ή πρώτου βαθμού.



Σχήμα 8.5: B-δένδρο τάξης 3.

Ο **παράγοντας χρησιμοποίησης χώρου** (storage utilization factor), U, ορίζεται ως ο λόγος του αριθμού των αποθηκευμένων κλειδιών προς το το σύνολο των διαθέσιμων θέσεων. Από τον ορισμό φαίνεται ότι η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή του παράγοντα χρησιμοποίησης χώρου είναι περίπου U_{min}=50% και U_{max}=100%, αντίστοιχα. Σχετικά με την εύρεση της μέσης τιμής του παράγοντα αυτού έχουν εμφανισθεί αρκετές δημοσιεύσεις στη βιβλιογραφία που είναι όμως από λίγο ως πολύ σύνθετες. Ακολουθεί μία απλοποιητική αλλά προσεγγιστική μέθοδος που δόθηκε από τον Leung (1984). Αν n ο αριθμός των κλειδιών και nod ο αριθμός των κόμβων του δένδρου, τότε από το δεύτερο ορισμό του B-δένδρου (που δεν θα χρησιμοποιηθεί άλλο στη συνέχεια) ισχύει:

$$U = \frac{n}{2d \times nod}$$

Για μία σταθερή τιμή του n ισχύει:

$$\mathrm{E}[U] = \frac{n}{2d} \times \mathrm{E}[\frac{1}{nod}]$$

ενώ για την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή του nod προκύπτει αντίστοιχα:

$$nod_{max} = \frac{n}{2d \times U_{min}} \qquad nod_{min} = \frac{n}{2d}$$

Υποθέτοντας προσεγγιστικά μία συνεχή ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[nod_{min}, nod_{max}]$ προκύπτει:

$$\mathrm{E}[\frac{1}{nod}] = \frac{1}{nod_{max} - nod_{min}} \int_{nod_{min}}^{nod_{max}} \frac{1}{nod}\, \mathsf{d}nod = \frac{2d\ U_{min}}{n \times (1 - U_{min})} \times \mathsf{ln} \frac{1}{U_{min}}$$

Αντικαθιστώντας U_{min}=50% προκύπτει ότι $\mathrm{E}[U] = \mathsf{ln}2 \approx 69\%$. Σημειώνεται ότι στην ανάλυση αυτή θα γίνει αργότερα αναφορά σε σχέση με άλλες δομές. Για το λόγο αυτό, το U_{min} θεωρήθηκε ως παράμετρος.

Από τον ορισμό του B-δένδρου είναι εύκολο να υπολογισθεί η μέση τιμή των προσπελάσεων για επιτυχή αναζήτηση στη χειρότερη περίπτωση. `Εστω, λοιπόν, ένα B-δένδρο τάξης m και ύψους h. Ο ελάχιστος αριθμός κλειδιών που μπορεί να περιέχει είναι:

$$n = 2 \times \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil^{h-1} - 1$$

ενώ ο μέγιστος αριθμός κλειδιών που μπορεί να περιέχει είναι:

$$n = m^h - 1$$

Συνεπώς η τιμή του ύψους ενός B-δένδρου περικλείεται μεταξύ των ορίων:

$$\mathsf{log}_m(n+1) \;\leq\; h \;\leq\; 1+\mathsf{log}_{m/2}\frac{n+1}{2}$$

Η εύρεση της βέλτιστης τιμής του m είναι ένα ενδιαφέρον πρόβλημα. Σε μία πρακτική υλοποίηση ενός καταλόγου με τη δομή του B-δένδρου οι εγγραφές θα αποτελούνται από μία τριάδα πεδίων: το κλειδί, το δενδρικό δείκτη, και το δείκτη των δεδομένων. Επομένως συνολικά το μέγεθος ενός κόμβου είναι $m \times (K+2P)$ bytes περίπου. Ο χρόνος για την ανάγνωση ενός τυχαίου κόμβου είναι:

$$s+r+\frac{m\times(K+2P)}{t'}$$

Δοθέντος του κόμβου η εύρεση ενός κλειδιού μπορεί να γίνει με δυαδική αναζήτηση σε χρόνο:

$$c\times \mathsf{log} m+d$$

όπου τα c και d είναι σταθερές. Απλοποιώντας τον προηγούμενο τύπο για το ύψος, προκύπτει ότι στη χειρότερη περίπτωση το ύψος είναι:

$$e\times\frac{\mathsf{log}\frac{n+1}{2}}{\mathsf{log} m}$$

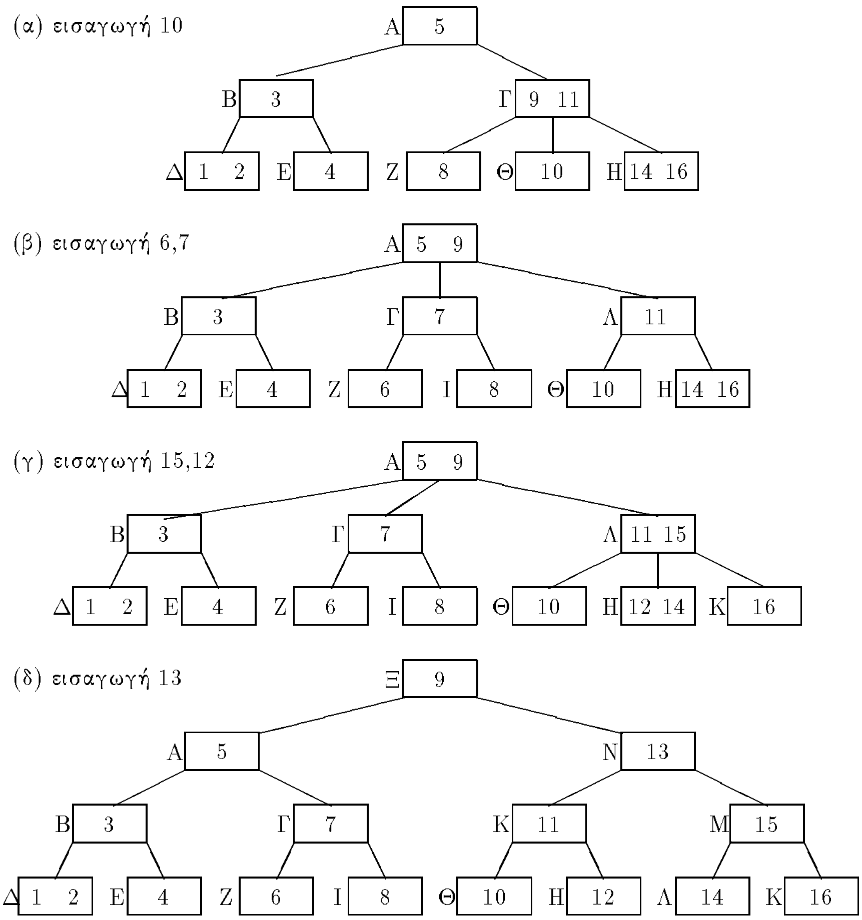
όπου το e σταθερά. Επομένως ο μέγιστος χρόνος αναζήτησης δίνεται από τον τύπο:

$$e\times \mathsf{log}\frac{n+1}{2}\times\left(\frac{s+r+d+\frac{m\times(K+2P)}{t'}}{\mathsf{log} m}+c\right)$$

που ελαχιστοποιείται αν ελαχιστοποιηθεί το άθροισμα της αγγύλης. Έτσι σε κάθε περίπτωση με αντικατάσταση των παραμέτρων και χρησιμοποιώντας μία υπολογιστική μέθοδο λαμβάνεται το βέλτιστο m. Αν προκύψει μέγεθος κόμβου μεγαλύτερο από το μέγεθος των απομονωτικών μνημών, τότε θεωρείται η τιμή του m που δεν ξεπερνά το μέγεθος των μνημών.

8.2.1 Εισαγωγή σε B-δένδρο

Για την εισαγωγή μίας εγγραφής σε ένα B-δένδρο, αρχικά με βάση το κλειδί της εγγραφής εντοπίζεται το φύλλο όπου πρέπει να γίνει η εισαγωγή. Αν το φύλλο έχει ελεύθερο χώρο, τότε η εισαγωγή είναι εύκολη υπόθεση. Αλλιώς, απαιτείται ιδιαίτερη προσοχή καθώς πρέπει ο συγκεκριμένος κόμβος να διασπασθεί σε δύο κόμβους, ώστε να αποθηκευθούν όλες οι εγγραφές. Η διάσπαση ενός φύλλου μπορεί να προκαλέσει αλυσιδωτή αντίδραση και να χρεισθούν περαιτέρω διασπάσεις κόμβων σε ανώτερα επίπεδα. Η διαδικασία των διασπάσεων θα διευκρινισθεί με το επόμενο παράδειγμα.



Σχήμα 8.6: B-δένδρο με διαδοχικές εισαγωγές.

Έστω ότι στο δένδρο του Σχήματος 8.5 εισάγεται το κλειδί 10, που κατευθύνεται στον κόμβο Ζ. Ο ορισμός του δένδρου παραβιάζεται, συνεπώς πρέπει να δημιουργηθεί νέος κόμβος όπως φαίνεται στο Σχήμα 8.6α. Το μεσαίο από τα κλειδιά 8, 9 και 10 (δηλαδή το 9) έχει ανέβει στον πατρικό κόμβο, ενώ το 8 επανα-αποθηκεύεται στον κόμβο Ζ και το 10 αποθηκεύεται στο νέο κόμβο Θ.

Η εισαγωγή του κλειδιού 6 στο δένδρο του Σχήματος 8.6α γίνεται εύκολα και γι΄ αυτό το νέο σχήμα παραλείπεται. Στη συνέχεια, έστω ότι εισάγεται το κλειδί 7, οπότε προκύπτει το Σχήμα 8.6β. Όπως και κατά την εισαγωγή του 10, έτσι και εδώ το μεσαίο κλειδί (δηλαδή το 7) προχωρεί ένα επίπεδο προς τη ρίζα. Όμως και στο νέο κόμβο παραβιάζεται ο ορισμός του Β-δένδρου. Συνεπώς πρέπει αναδρομικά να εφαρμοσθεί η ίδια διαδικασία. Έτσι, το μεσαίο κλειδί (δηλαδή το 9) ανεβαίνει και πάλι ένα επίπεδο και αποθηκεύεται στη ρίζα. Κατά παρόμοιο τρόπο με την εισαγωγή των κλειδιών 15 και 12 προκύπτει το Σχήμα 8.6γ. Αν, όμως, στο σημείο αυτό εισαχθεί το κλειδί 13, τότε μετά από διαδοχικές διασπάσεις κόμβων θα διασπασθεί και η ρίζα. Έτσι προκύπτει το Σχήμα 8.6δ.

Η ερώτηση είναι πόσο συχνά γίνεται η διάσπαση των κόμβων. Είναι φανερό ότι η πρώτη διάσπαση (δηλαδή η διάσπαση της αρχικής ρίζας) δημιουργεί δύο νέους κόμβους, ενώ οι επόμενες δημιουργούν από ένα μόνο νέο κόμβο μέχρι και h–1 νέους κόμβους στην περίπτωση που η διάσπαση μεταφερθεί μέχρι τη ρίζα (όπου h είναι το ύψος του δένδρου). Έτσι, όταν το δένδρο έχει ήδη p κόμβους, έχουν συμβεί p–2 διασπάσεις. Κάθε κόμβος έχει το ελάχιστο $\lceil m/2 \rceil$–1 κλειδιά, εκτός από τη ρίζα που έχει το ελάχιστο ένα κλειδί. Συνεπώς ένα δένδρο με p κόμβους περιέχει το ελάχιστο $1+(p-1)\times(\lceil m/2 \rceil-1)$ κλειδιά. Η πιθανότητα να συμβεί διάσπαση με την εισαγωγή ενός νέου κλειδιού είναι λιγότερο από:

$$\frac{p-2}{1+(p-1)\times(\lceil m/2 \rceil-1)}$$

που είναι λιγότερο από 1 διάσπαση ανά $\lceil m/2 \rceil$–1 εισαγωγές κλειδιών. Ασυμπτωτικά (δηλαδή, μεγάλο p) για m=10 και m=20 η πιθανότητα διάσπασης είναι 0.25 και 0.204, αντίστοιχα. Δηλαδή, όσο μεγαλύτερη είναι η τάξη του δένδρου, τόσο αυτή η πιθανότητα μικραίνει.

Η προηγούμενη ανάλυση είναι προσεγγιστική. Επακριβής ανάλυση των χαρακτηριστικών του Β-δένδρου είναι εξαιρετικά πολύπλοκη και μέχρι στιγμής περιορίζεται στα κατώτερα επίπεδα. Η ανάλυση αυτή λέγεται **ανάλυση κρασπέδου** (fringe analysis) και χρησιμοποιεί αλυσίδες Markov. Η σημαντικότερη δημοσίευση στη βιβλιογραφία εμφανίσθηκε το 1982 από τους

Eisenbarth et al., όπου έχει αποδειχθεί ότι η πιθανότητα να συμβεί μία ή περισσότερες διασπάσεις κατά την εισαγωγή του $n+1$ κλειδιού είναι:

$$\frac{1}{(m-1)\times \ln 2} + \mathrm{O}(m^{-2})$$

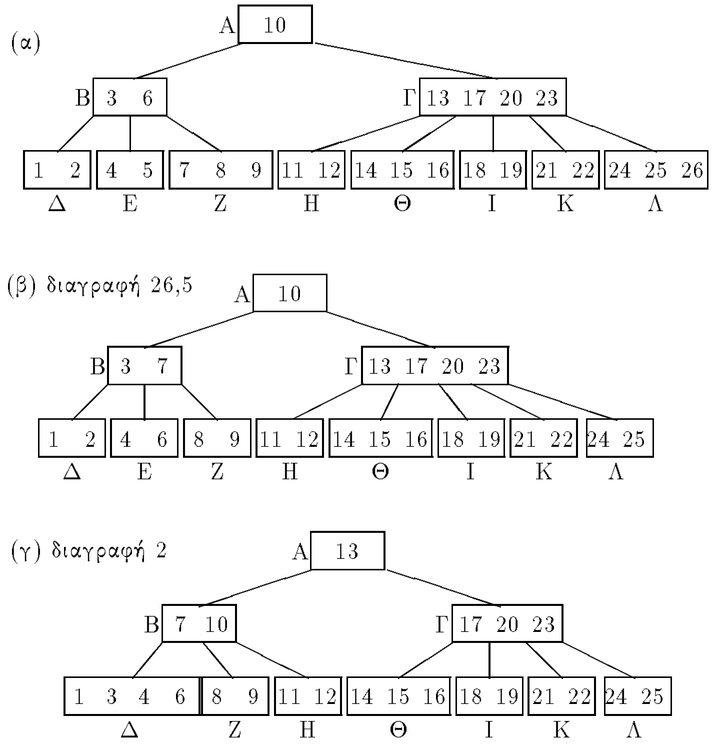
8.2.2 Διαγραφή σε Β-δένδρο

Η διαγραφή σε Β-δένδρο είναι σαφώς δυσκολότερη διεργασία από την εισαγωγή. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι με τη διαγραφή ενός κλειδιού μπορεί να παραβιασθεί ο ορισμός του Β-δένδρου και να χρειασθεί συγχώνευση δύο γειτονικών κόμβων. Μάλιστα, η συγχώνευση δύο κόμβων μπορεί να προκαλέσει άλλες συγχωνεύσεις κόμβων σε ανώτερα επίπεδα. Υπενθυμίζεται στο σημείο αυτό ότι το αρχείο VSAM είναι δυναμικό κατά τις εισαγωγές, όμως δεν διακρίνεται για δυναμικότητα κατά τις διαγραφές. Αυτή είναι η κυριότερη διαφορά μεταξύ αρχείου VSAM και Β-δένδρου. Η διαδικασία των συγχωνεύσεων θα διευκρινισθεί με το επόμενο παράδειγμα.

Έστω, λοιπόν, ότι δίνεται ένα Β-δένδρο τάξης 5, όπως στο Σχήμα 8.7α. Αρχικά παρουσιάζονται τρεις περιπτώσεις όπου το κλειδί που πρέπει να διαγραφεί ανήκει σε ένα φύλλο. Για παράδειγμα, έστω ότι πρέπει να διαγραφεί το κλειδί 26. Αυτή η πρώτη περίπτωση είναι η απλούστερη και εκτελείται χωρίς άλλες παρενέργειες, επειδή ο ορισμός δεν διαταράσσεται.

Έστω ότι στη συνέχεια πρέπει να διαγραφεί το κλειδί 5. Πιθανή διαγραφή του κλειδιού 5 θα διατάραζε τον ορισμό, επειδή τελικά στον κόμβο θα έμενε μόνο ένα κλειδί, δηλαδή λιγότερο από $\lceil m/2\rceil -1=2$. Στην περίπτωση αυτή ελέγχεται αν ο γειτονικός στα δεξιά κόμβος Ζ έχει περισσότερο από 2 κλειδιά. Αυτή η συνθήκη συμβαίνει, αφού ο κόμβος Ζ έχει τρία κλειδιά. Επίσης, φαίνεται ότι ο πατρικός κόμβος του κόμβου Ε (δηλαδή ο Β) περιέχει το κλειδί 6 που αποτελεί το αμέσως μεγαλύτερο κλειδί από το 5. Άρα είναι δυνατό να διαγραφεί το κλειδί 5 με ταυτόχρονη άνοδο του κλειδιού 7 από τον κόμβο Ζ στον κόμβο Β, και κάθοδο του κλειδιού 6 από τον κόμβο Β στον κόμβο Ε. Έτσι προκύπτει το Β-δένδρο του Σχήματος 8.7β. Αν ο δεξιά γειτονικός κόμβος δεν είχε περισσότερο από 2 κόμβους, τότε η προηγούμενη διαδικασία θα υλοποιούνταν με το γειτονικό αριστερά κόμβο και το αντίστοιχο κλειδί του πατρικού κόμβου. Αυτή ήταν η δεύτερη περίπτωση που μπορεί να παρουσιαθεί σε περίπτωση διαγραφής.

Αν δεν μπορεί να βρεθεί παρόμοια λύση ούτε από δεξιά ούτε από αριστερά, τότε πρέπει να γίνει συγχώνευση (η τρίτη περίπτωση). Η συγχώνευση

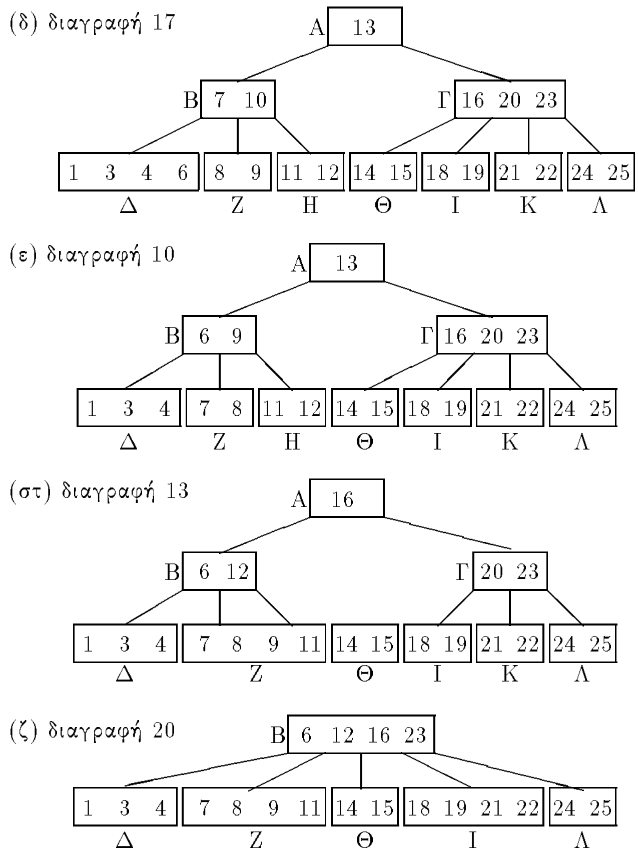


Σχήμα 8.7: Β-δένδρο με διαδοχικές διαγραφές.

αφορά σε τρεις κόμβους, όπου οι δύο είναι από το κατώτερο επίπεδο και ο ένας από το ανώτερο. Για παράδειγμα, έστω ότι πρέπει να διαγραφεί το κλειδί 2. Η διαδικασία ακολουθεί τα εξής βήματα. Πρώτον, το κλειδί 1 που απομένει στον κόμβο Δ, το κλειδί 3 του κόμβου Β και τα κλειδιά 4 και 6 του κόμβου Ε συγχωνεύονται και αποθηκεύονται στον κόμβο Δ. Ο κόμβος Ε δεν έχει πλέον κανένα κλειδί και αποδίδεται στο σύστημα, ενώ ο κόμβος Β έχει μόνο ένα. Το δεύτερο βήμα είναι παρόμοιο προς τη διαδικασία που αναπτύχθηκε κατά τη διαγραφή του κλειδιού 26. Δηλαδή, ελέγχεται αν ο δεξιός γείτονας του κόμβου Β (δηλαδή ο Γ) έχει περισσότερο από 2 κλειδιά. Αυτό πράγματι συμβαίνει, οπότε το κλειδί 13 του κόμβου Γ ανεβαίνει κατά ένα επίπεδο και φθάνει στη ρίζα, ενώ το κλειδί της ρίζας που είναι αμέσως μεγαλύτερο από το 7 (δηλαδή το 10) κατεβαίνει στον κόμβο Β. Στο Σχήμα 8.7γ φαίνεται η τελική μορφή που παίρνει το Β-δένδρο μετά τη διαγραφή του κλειδιού 2.

Μέχρι τώρα εξετάσθηκαν περιπτώσεις διαγραφής που το κλειδί είναι αποθηκευμένο σε φύλλο. Η διαδικασία διαγραφής κλειδιού που είναι αποθηκευμένο σε εσωτερικό κόμβο είναι λίγο διαφορετική. Στην περίπτωση αυτή πρέπει να εντοπισθεί το λεξικογραφικά αμέσως προηγούμενο κλειδί και να καταλάβει τη θέση του διαγραφόμενου. Και πάλι διακρίνονται μερικές περιπτώσεις.

Για παράδειγμα, έστω ότι από το δένδρο του Σχήματος 8.7γ πρέπει να διαγραφεί το κλειδί 17. Ελέγχεται, λοιπόν, αν ο κόμβος Θ περιέχει περισσότερο από 2 κλειδιά. Η συνθήκη αυτή πράγματι συμβαίνει και συνεπώς το κλειδί 16 ανέρχεται κατά ένα επίπεδο στον κόμβο Γ, ώστε να μη διαταραχθεί ο ορισμός του Β-δένδρου. Φαίνεται ότι αυτή η περίπτωση διαγραφής αντιμε-



Σχήμα 8.7: Β-δένδρο με διαδοχικές διαγραφές (συνέχεια).

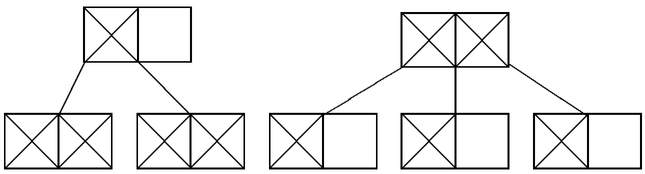
τωπίσθηκε εύκολα `ενοχλώντας' μόνο έναν κόμβο παιδί του κόμβου, όπου ανήκε το κλειδί που διαγράφηκε. Η νέα μορφή του δένδρου παρουσιάζεται στο Σχήμα 8.7δ.

`Εστω ότι στη συνέχεια πρέπει να διαγραφεί το κλειδί 10. Αν όμως ανέλθει το κλειδί 9 για να καλύψει το κενό, τότε δεν ισχύει πλέον ο ορισμός για τον κόμβο Ζ, γιατί περιέχει μόνο το κλειδί 8. Η συνέχεια ακολουθεί κατά τα γνωστά. Δηλαδή, ελέγχεται προς τα δεξιά ο κόμβος Η, αλλά αυτός δεν μπορεί να συνεισφέρει. Ο προς τα αριστερά κόμβος Δ έχει περισσότερο από 2 κλειδιά. `Αρα, με άνοδο του κλειδιού 6 από τον κόμβο Δ στον κόμβο Β και κάθοδο του κλειδιού 7 από τον κόμβο Β στον κόμβο Ζ το δένδρο καταλήγει στην τελική μορφή του Σχήματος 8.7ε. `Ετσι, στην περίπτωση αυτή υπεισήλθαν τρεις κόμβοι στη διαδικασία αποκατάστασης της ισορροπίας.

Απομένει να εξετασθούν δύο άλλες περιπτώσεις διαγραφής. `Εστω ότι πρέπει να διαγραφεί το κλειδί 13 της ρίζας. Στην περίπτωση αυτή το αμέσως μικρότερο κλειδί 12 παίρνει τη θέση του 13 στη ρίζα και συνεπώς το πρόβλημα μεταφέρεται στον κόμβο Η, που απομένει μόνο με το κλειδί 11. Ο κόμβος Η δεν έχει δεξιό αδελφό, ενώ ο αριστερός του αδελφός Ζ δεν μπορεί να συνεισφέρει, γιατί έχει μόλις δύο κλειδιά. Σε επόμενο βήμα, το περιεχόμενο των κόμβων Ζ και Η μαζί με το κλειδί από τον κόμβο Β, που ανήκει στο μέσο των διαστημάτων τιμών των δύο κόμβων (δηλαδή το 9) συγχωνεύονται σε ένα κόμβο και αποθηκεύονται στη θέση του κόμβου Ζ. `Αρα, το πρόβλημα έχει μεταφερθεί στον κόμβο Β που περιέχει μόνο το κλειδί 6. Η λύση πλέον μπορεί να δοθεί μόνο από τον αδελφό του κόμβου Β, δηλαδή τον κόμβο Γ. Στον κόμβο Β κατέρχεται το κλειδί 12 (που προηγουμένως είχε ανέλθει στη ρίζα), ενώ το κλειδί 16 του κόμβου Γ ανέρχεται στη ρίζα. Ταυτόχρονα όμως, επειδή αλλάζουν τα διαστήματα τιμών που δεικτοδοτούνται από τη ρίζα, ο κόμβος Θ δεν δεικτοδοτείται πλέον από τον κόμβο Γ αλλά από τον κόμβο Β. Η τελική μορφή του δένδρου παρουσιάζεται στο Σχήμα 8.7στ.

Η τελευταία περίπτωση διαγραφής είναι εκείνη που προκαλεί την ελάττωση του ύψους του δένδρου. `Εστω, λοιπόν, ότι πρέπει να διαγραφεί το κλειδί 20. Αρχικά το κλειδί 19 ανεβαίνει από τον κόμβο Ι στον κόμβο Γ για να καλύψει το κενό. Το πρόβλημα πλέον βρίσκεται στον κόμβο Ι που περιέχει μόνο το κλειδί 18. `Οπως και πριν, το περιεχόμενο των κόμβων Ι και Κ μαζί με το κλειδί 19, που βρίσκεται μεταξύ των διαστημάτων τιμών των κόμβων αυτών, αποθηκεύονται στον κόμβο Ι, ενώ ο κόμβος Κ αποδίδεται και πάλι στο σύστημα. Τώρα πλέον το πρόβλημα βρίσκεται στον κόμβο Γ που έχει μόνο το κλειδί 23. Ακόμη ο αριστερός αδελφός και η ρίζα έχουν τον ελάχιστο αριθμό κλειδιών. Άρα, θα γίνει νέα συγχώνευση. Έτσι, το περιεχόμενο των κόμβων Α, Β και Γ αποθηκεύεται στον κόμβο Β και οι άλλοι αποδίδονται στο σύστημα. Η τελική μορφή του δένδρου φαίνεται στο Σχήμα 8.7ζ, όπου φαίνεται ότι το ύψος του δένδρου από τρία έγινε δύο.

Όσον αφορά στην επίδοση της διαγραφής αναφέρεται ότι στη χειρότερη περίπτωση (όπου μία διαγραφή θα προκαλέσει συγχώνευση της ρίζας) θα γίνουν $2h$–1 προσπελάσεις κόμβων για ανάγνωση και h+1 προσπελάσεις για αποθήκευση. Ωστόσο, αυτή η περίπτωση δεν είναι ιδιαίτερα πιθανή. Κατά μέσο όρο απαιτείται η ανάγνωση $h+1+1/k$ κόμβων και η επανα-αποθήκευση $4+2/k$ κόμβων, όπου $k = \lceil m/2 \rceil - 1$.

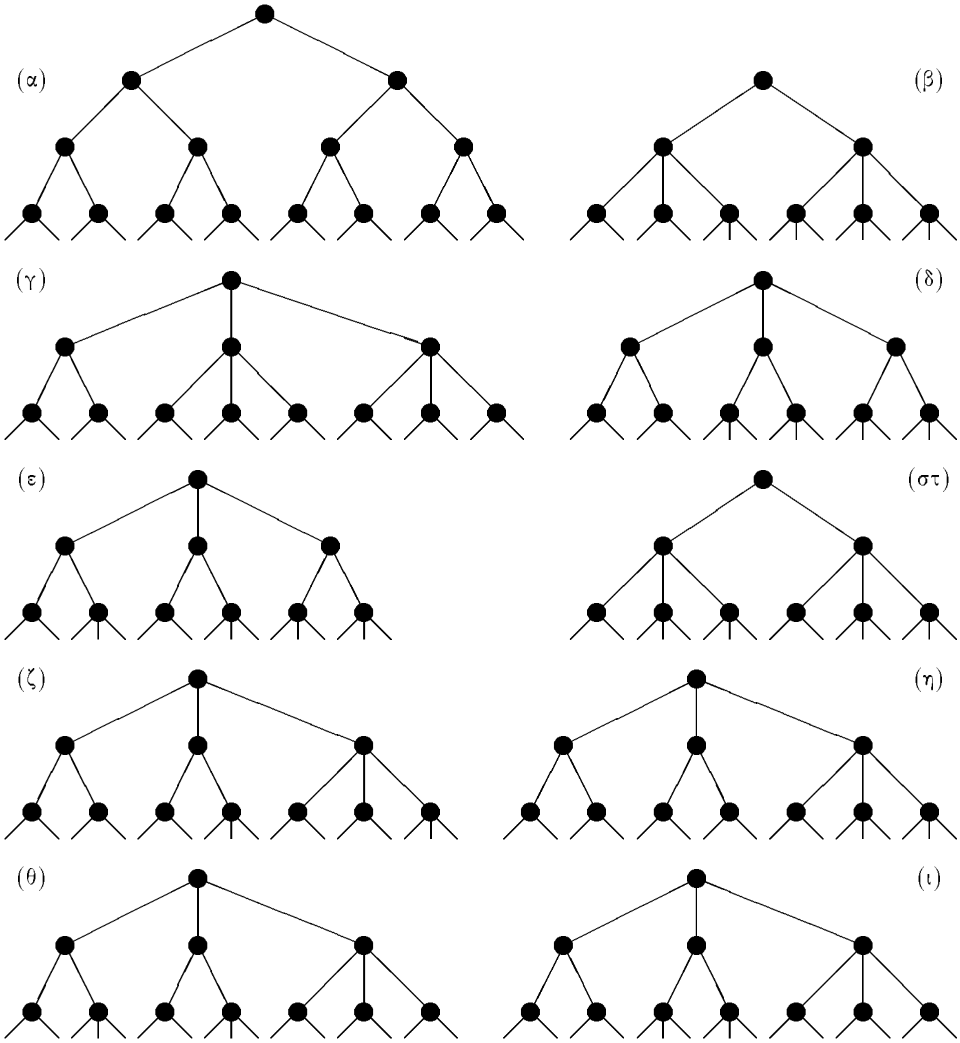


Σχήμα 8.8: Ομάδα BT(3,5).

Είναι ευνόητο ότι από τη μορφή του Β-δένδρου εξαρτάται ο συνολικός καταλαμβανόμενος χώρος (και επομένως ο παράγοντας χρησιμοποίησης χώρου) και η επίδοση κατά την επιτυχή ή την ανεπιτυχή αναζήτηση. Στο Σχήμα 8.8 φαίνονται δύο διακριτές δομές Β-δένδρων τάξης 3 που περιέχουν 5 κλειδιά. Οι δύο αυτές εκδοχές καταλαμβάνουν 3 και 4 κόμβους αντίστοιχα, έχουν παράγοντα χρησιμοποίησης χώρου 5/6 και 5/8 αντίστοιχα, ενώ η μέση τιμή προσπελάσεων για επιτυχή αναζήτηση είναι 9/5 και 8/5 αντίστοιχα. Ο αναγνώστης θα διαπιστώσει ότι εκτός από αυτά τα δύο δένδρα δεν μπορούν να υπάρξουν άλλα παρόμοια τάξης 3 με 5 κλειδιά. Οι δύο αυτές διακριτές δομές αποτελούν μία κλάση που συμβολίζεται με BT(3,5).

Στο Σχήμα 8.9 παρουσιάζεται η κλάση BT(3,15) που αποτελείται από 10 διακριτές δομές. Στον Πίνακα 8.1 για κάθε δομή δίνονται οι αντίστοιχα η μέση τιμή προσπελάσεων για επιτυχή αναζήτηση και ο συνολικός καταλαμβανόμενος χώρος. Από τον πίνακα αυτόν προκύπτει ότι:

τα Β-δένδρα που είναι βέλτιστα από πλευράς χώρου είναι περίπου βέλτιστα και από πλευράς χρόνου, ενώ τα Β-δένδρα που είναι βέλτιστα από πλευράς χρόνου είναι περίπου χείριστα από πλευράς χώρου.



Σχήμα 8.9: Ομάδα BT(3,15).

Δένδρο	Μέση τιμή προσπελάσεων	Καταλαμβανόμενος χώρος
α	3,27	15
β	2,60	9
γ	2,40	12
δ	2,53	10
ε	2,53	10
στ	2,60	9
ζ	2,47	11
η	2,47	11
θ	2,47	11
ι	2,27	11

Πίνακας 8.1: Σύγκριση δομών της κλάσης BT(3,15).

Η διαπίστωση αυτή δικαιολογείται από το γεγονός ότι οι δομές (β) και (στ), που καταλαμβάνουν τον ελάχιστο χώρο των 9 κόμβων, έχουν χρονικό κόστος 2,60 που είναι μόλις 8,3% μεγαλύτερο από την ελάχιστη τιμή των 2,40 προσπελάσεων. Αντίθετα, η δομή (γ), που είναι η καλύτερη από πλευράς χρόνου, καταλαμβάνει 12 κόμβους που είναι 33,3% περισσότερο από την ελάχιστη τιμή των 9 κόμβων. Η διαπίστωση αυτή ανήκει στους Rosenberg και Snyder (1981).

Βέβαια, η μορφή ενός B-δένδρου προσδιορίζεται από τη σειρά άφιξης των κλειδιών και δεν είναι δυνατόν να γίνει επιλογή εκ μέρους του χρήστη. Ωστόσο, το πρακτικό συμπέρασμα είναι ότι με μία άλλη πολιτική διαχείρισης των διασπάσεων/συγχωνεύσεων μπορεί να υπάρξουν διαφοροποιήσεις στην επίδοση της δομής. Στη συνέχεια παρουσιάζεται μία τέτοια μέθοδος.

8.3 B*-δένδρα

Η μέση τιμή του παράγοντα χρησιμοποίησης χώρου (δηλαδή E[U]=69%) ενός B-δένδρου είναι δυνατό να αυξηθεί αν κατά την εισαγωγή εφαρμοσθεί η εξής τεχνική. Αν κάποια εισαγωγή προκαλέσει υπερχείλιση, τότε να μην γίνει διάσπαση (οπότε θα προκύψουν δύο κόμβοι με περιεκτικότητα 50%), αλλά κάποια κλειδιά να αποθηκευθούν σε ένα γειτονικό κόμβο που δεν είναι 100% πλήρης. Αν και οι δύο γειτονικοί κόμβοι είναι πλήρεις, τότε διασπώνται δύο κόμβοι (ο υπερχειλίζων και ένας γειτονικός) και προκύπτουν τρεις.

Με αυτό το τέχνασμα η ελάχιστη τιμή του παράγοντα χρησιμοποίησης χώρου καθίσταται U_{min}=67%, ενώ με αντικατάσταση στον τύπο του Leung προκύπτει μέση τιμή E[U]=81%. Άλλο πλεονέκτημα είναι ότι η αναζήτηση γίνεται ταχύτερα, ενώ το μειονέκτημα είναι το αυξημένο κόστος κατά τις εισαγωγές και τις διαγραφές. Τα B*-δένδρα, που προτάθηκαν επίσης από τους Bayer και McCreight το 1972, ορίζονται κατ΄ αναλογία προς τα B-δένδρα.

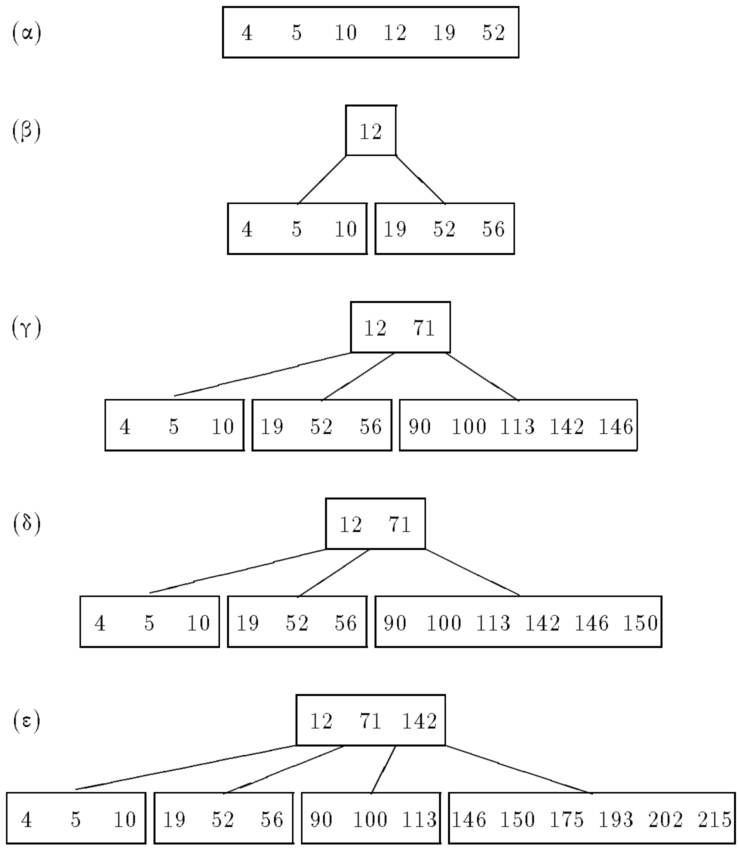
Σύμφωνα με έναν ορισμό το B*-δένδρο τάξης m είναι ένα δένδρο αναζήτησης m δρόμων όπου:

- η ρίζα έχει το ελάχιστο δύο παιδιά και το μέγιστο $2\lfloor\frac{2m-2}{3}\rfloor+1$ παιδιά,
- οι εσωτερικοί κόμβοι, εκτός της ρίζας, έχουν το ελάχιστο $\lfloor\frac{2m-2}{3}\rfloor+1$ παιδιά και το μέγιστο m παιδιά,
- ένας εσωτερικός κόμβος με k κλειδιά έχει $k+1$ παιδιά, και
- οι εξωτερικοί κόμβοι βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.

Τα πράγματα φωτίζονται καλύτερα με τα Σχήματα 8.10 και 8.11, όπου παρουσιάζεται αντίστοιχα η αλληλουχία διαδοχικών εισαγωγών σε ένα B-δένδρο και σε ένα B*-δένδρο τάξης 7. Σε ένα B-δένδρο τάξης 7 ο ελάχιστος και ο μέγιστος αριθμός παιδιών της ρίζας είναι 2 και 7 αντίστοιχα, ενώ ο ελάχιστος και ο μέγιστος αριθμός παιδιών των εσωτερικών κόμβων είναι 4 και 7 αντίστοιχα. Σε αντίθεση για ένα B*-δένδρο τάξης 7 ισχύουν τα εξής: ο ελάχιστος και ο μέγιστος αριθμός παιδιών της ρίζας είναι 2 και 9 αντίστοιχα, ενώ ο ελάχιστος και ο μέγιστος αριθμός παιδιών των εσωτερικών κόμβων είναι 5 και 7 αντίστοιχα.

Έστω ότι στο B-δένδρο έχουν ήδη εισαχθεί 6 κλειδιά που στεγάζονται στη ρίζα. Με την εισαγωγή ενός έβδομου κλειδιού η ρίζα διασπάται και προκύπτουν δύο κόμβοι-παιδιά. Η διαδικασία αυτή παρουσιάζεται στο Σχήμα 8.10β. Αντίστοιχα, έστω ότι στο B*-δένδρο έχουν εισαχθεί ήδη 8 κλειδιά και ακολουθεί εισαγωγή του έννατου. Στο Σχήμα 8.11β παρουσιάζεται η διάσπαση της ρίζας και η γένεση δύο κόμβων-παιδιών. Η ρίζα στο B*-δένδρο μπορεί να προσφέρει στέγη σε περισσότερα κλειδιά από την τάξη του δένδρου, ώστε με τη διάσπαση της ρίζας να προκύψουν κόμβοι πλήρεις κατά 67%.

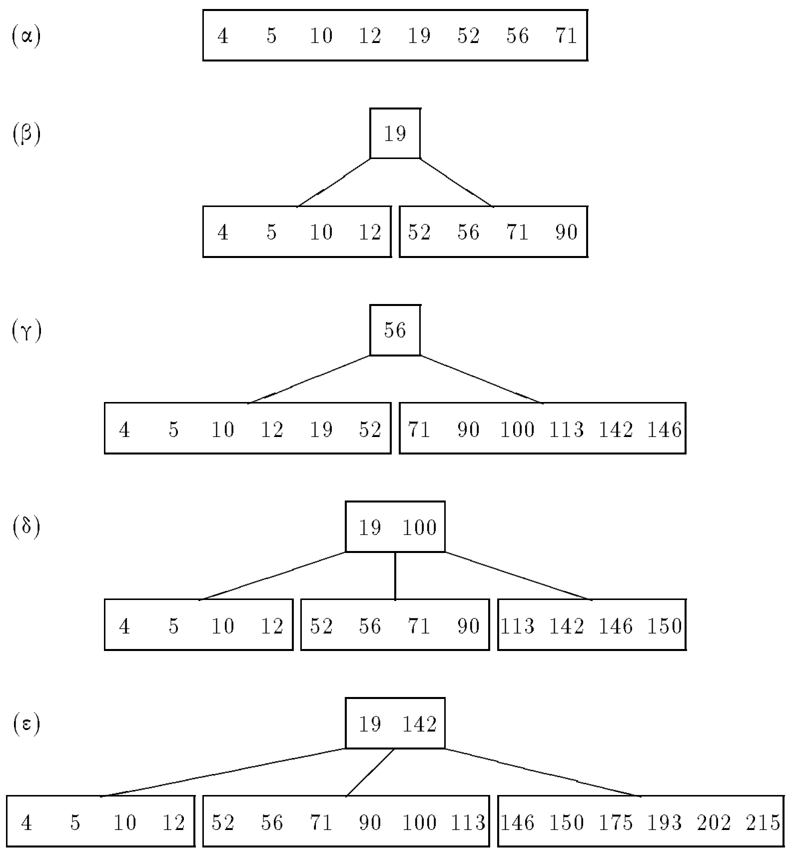
Η διαδικασία των εισαγωγών συνεχίζεται. Τα κλειδιά 100, 113 και 142 κατευθύνονται στο δεξιό παιδί της ρίζας του B*-δένδρου του Σχήματος 8.11β



Σχήμα 8.10: Διαδοχικές εισαγωγές σε Β-δένδρο.

και προκαλούν την υπερχείλιση του, όχι όμως και τη διάσπασή του. Στο Σχήμα 8.11γ παρουσιάζεται το Β*-δένδρο μετά την εισαγωγή του κλειδιού 146. Είναι φανερό ότι μερικά κλειδιά έχουν περάσει στον αριστερό γειτονικό κόμβο με ανάλογη ρύθμιση των κλειδιών της ρίζας. Το Σχήμα 8.10γ παρουσιάζει αντίστοιχο Β-δένδρο που περιέχει τα ίδια κλειδιά. Στην περίπτωση αυτή καταλαμβάνονται 4 κόμβοι έναντι των 3 του Β*-δένδρου.

Αν υπάρξει υπερχείλιση σε κόμβο ενός Β*-δένδρου και δεν υπάρχει χώρος σε γειτονικό κόμβο, τότε δημιουργείται ένας νέος κόμβος. Ταυτόχρονα τα κλειδιά του κόμβου που υπερχειλίζει και ενός γειτονικού κόμβου (με προτεραιότητα στα αριστερά) αναδιανέμονται πλέον στους τρεις κόμβους. Για παράδειγμα, έστω ότι στα δένδρα των Σχημάτων 8.10γ και 8.11γ εισάγεται



Σχήμα 8.11: Διαδοχικές εισαγωγές σε Β*-δένδρο.

το κλειδί 150. Η επιλογή των δύο μεσαίων κλειδιών που θα ανέλθουν στο ανώτερο επίπεδο προκύπτει με την εξής απλή μέθοδο. Τα κλειδιά που υπεισέρχονται στη διαδικασία της αναδιανομής είναι τα κλειδιά των δύο κόμβων, το κλειδί από το ανώτερο επίπεδο και το εισαγόμενο κλειδί, άρα ο συνολικός αριθμός κλειδιών είναι $2m$. Το πρώτο κλειδί που επιλέγεται είναι το $\lceil(2m+1)/3\rceil$-οστό (έστω ότι η ποσότητα αυτή συμβολίζεται με a), ενώ το δεύτερο είναι το $\lceil(2m+1-a)/2\rceil$-οστό από τα υπόλοιπα $2m$-a. Τα Σχήματα 8.10δ και 8.11δ δείχνουν τη νέα μορφή των δένδρων. Αν και τα δύο δένδρα έχουν από τέσσερις κόμβους, εντούτοις οι δύο κόμβοι του Β-δένδρου είναι πλήρεις κατά 50% και ο ένας κατά 100%, ενώ όλοι οι κόμβοι του Β*-δένδρου είναι πλήρεις κατά 50%. Η διαδικασία των αφίξεων νέων εγγραφών συνεχίζεται με τα κλειδιά 15, 16, 17 και 18. Οι νέες μορφές των δένδρων φαίνονται στα Σχήματα 8.10ε και 8.11ε.

Όπως φαίνεται τα B*-δένδρα είναι πιο χρονοβόρα από τα B-δένδρα κατά την εισαγωγή και κατά τη διαγραφή, όμως κάνουν καλύτερη χρήση του χώρου από τα B-δένδρα, επειδή διακρίνονται από μικρότερο ύψος και λιγότερους κόμβους για τον ίδιο αριθμό κλειδιών. Επιπλέον προσφέρουν καλύτερους χρόνους αναζήτησης, δηλαδή η μέση τιμή των προσπελάσεων για αναζήτηση ενός κλειδιού σε δένδρο τάξης m με n κλειδιά στη χειρότερη περίπτωση είναι:

$$T_{\pi\rho o\sigma} \leq 1 + \log_{(2m-2)/3}\frac{n+1}{2}$$

Από τους Eisenbarth et al. έχει αποδειχθεί ότι η πιθανότητα να γίνει μία ή περισσότερες διασπάσεις κατά την εισαγωγή του $(n+1)$-κλειδιού είναι:

$$\frac{1}{m-1} + \mathrm{O}(m^{-2})$$

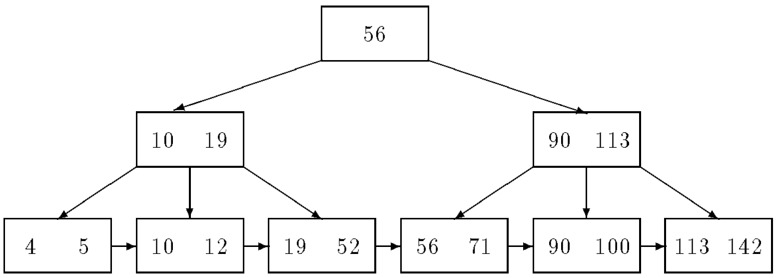
Συγκρίνοντας τον τύπο αυτό με τον αντίστοιχο τύπο από τα B-δένδρα προκύπτει αμέσως ότι στα B*-δένδρα γίνεται σπανιότερα διάσπαση.

Από την προηγούμενη ανάπτυξη γίνεται φανερό ότι για την υλοποίηση της δομής αυτής πρέπει να θεωρηθεί διαφορετικός τύπος εγγραφής για τη ρίζα. Λιγότερο συχνά συναντάται στη βιβλιογραφία ένας παραλλαγμένος ορισμός του B*-δένδρου, όπου ο κόμβος της ρίζας δέχεται το ίδιο μέγιστο περιεχόμενο με τους υπόλοιπους κόμβους, ενώ η πολιτική διαχείρισης της υπερχείλισης είναι κοινή. Η τεχνική της διάσπασης δύο κόμβων σε τρεις μπορεί να γενικευθεί με διάσπαση τριών κόμβων σε τέσσερις, τεσσάρων κόμβων σε πέντε κοκ. Στις περιπτώσεις αυτές η ελάχιστη τιμή του παράγοντα χρησιμοποίησης χώρου θα ισούται αντίστοιχα με 75%, 80% κοκ., ενώ η μέση τιμή προκύπτει από τον τύπο του Leung. Βέβαια είναι ευνόητο ότι το τίμημα έναντι του κέρδους αυτού σε καταλαμβανόμενο χώρο είναι το αυξημένο κόστος στον απαιτούμενο χρόνο για εισαγωγές και διαγραφές.

8.4 B$^+$-δένδρα

Η δομή που χρησιμοποιείται περισσότερο σε εμπορικά πακέτα για τη δημιουργία καταλόγων είναι τα B$^+$-δένδρα. Η δομή αυτή προτάθηκε από τον Knuth και ορίζεται ως εξής. Σε ένα B$^+$-δένδρο βαθμού d:

- η ρίζα έχει το ελάχιστο δύο παιδιά, εκτός αν είναι φύλλο,
- οι εσωτερικοί κόμβοι δεν έχουν περισσότερο από $2d$ κλειδιά και λιγότερο από d κλειδιά. Οι εσωτερικοί κόμβοι περιέχουν μόνο κλειδιά και δείκτες προς το κατώτερο επίπεδο,
- όλοι οι εξωτερικοί κόμβοι βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο. Αν το B^+-δένδρο χρησιμοποιείται ως κύριος κατάλογος, τότε οι εξωτερικοί κόμβοι περιέχουν εγγραφές, ενώ αν χρησιμοποιείται ως δευτερεύων κατάλογος, τότε οι εξωτερικοί κόμβοι περιέχουν κλειδιά και δείκτες προς εγγραφές, και
- ένας εσωτερικός κόμβος με k κλειδιά έχει k+1 παιδιά.



Σχήμα 8.12: Κατάλογος με δομή B^+-δένδρου.

Από τον ορισμό φαίνεται ότι (όπως το B-δένδρο) το B^+-δένδρο δεν είναι απαραίτητα δυαδικό δένδρο. Για παράδειγμα, είναι δυνατόν από κάθε εσωτερικό κόμβο του B^+-δένδρου να δεικτοδοτούνται 100 κόμβοι παιδιά. Σε αντίθεση προς το B-δένδρο, το B^+-δένδρο είναι ετερογενές. Στο Σχήμα 8.12 παρουσιάζεται ένα B^+-δένδρο, όπου οι αριθμοί στα φύλλα δηλώνουν τα κλειδιά ολόκληρων εγγραφών, ενώ οι αριθμοί στους εσωτερικούς κόμβους δηλώνουν απλά κλειδιά. Επίσης τα φύλλα περιέχουν δείκτες προς το επόμενο φύλλο για διευκόλυνση της σειριακής επεξεργασίας. Φαίνεται, λοιπόν, ότι η δομή υποδιαιρείται σε δύο λογικά μέρη, όπου το ανώτερο εξυπηρετεί το κατώτερο ως καταλόγος. Πραγματικά σε μία υλοποίηση θα πρέπει να είναι διαφορετικός ο τύπος των εσωτερικών από τον τύπο των φύλλων. Στη συνέχεια θα φανεί ότι αυτός ο κατάλογος λειτουργεί ως ένα απλό B-δένδρο όπως αναπτύχθηκε προηγουμένως. Κάλλιστα, επίσης, θα μπορούσε ο κατάλογος αυτός να είναι ένα B*-δένδρο.

Στο σημείο αυτό ανοίγει μία παρένθεση. Έχει χρησιμοποιηθεί ήδη ο όρος σελίδα για να δηλωθεί το ελάχιστο φυσικό μέγεθος δεδομένων που μεταφέρεται μεταξύ κύριας και δευτερεύουσας μνήμης. Ωστόσο, η μεταφορά δεδομένων γίνεται λογικά κατά κάδους. Στην πιο απλή μορφή μπορεί να θεωρηθεί ότι ένας κάδος ταυτίζεται με μία σελίδα. Στη συνέχεια λοιπόν, για λόγους ευκολίας ο όρος κάδος θα χρησιμοποιηθεί ισοδύναμα με την έννοια του κόμβου.

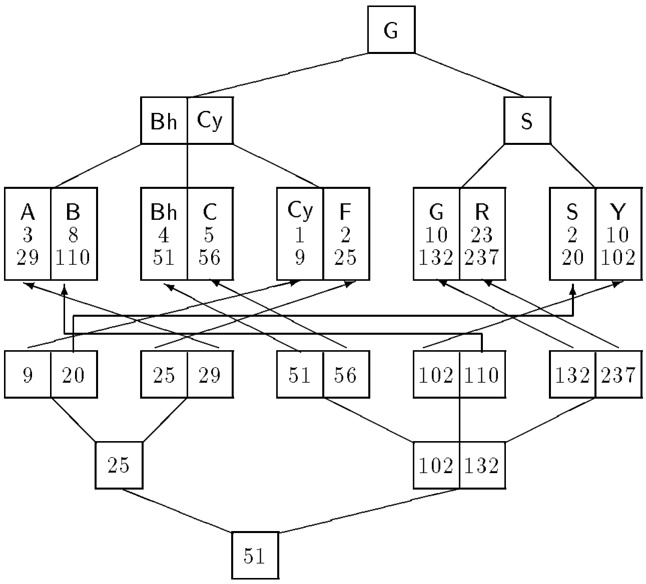
Η βασική διαφορά μεταξύ των B- και B*-δένδρων αφ᾽ ενός και του B$^+$-δένδρου αφ᾽ ετέρου είναι ότι στο B$^+$-δένδρο τα δεδομένα βρίσκονται μόνο στα φύλλα. Σύμφωνα με τον ορισμό, οι εσωτερικοί κόμβοι έχουν από d ως $2d$ κλειδιά, ενώ τα φύλλα (που ταυτίζονται με τους κάδους) περιέχουν έναν αριθμό εγγραφών που λέγεται **παράγοντας καδοποίησης** (bucket factor, $Bkfr$). Για παράδειγμα, σε ένα εσωτερικό και σε ένα εξωτερικό κόμβο μπορεί να έχουν αποθηκευθεί 200 κλειδιά και 10 εγγραφές, αντίστοιχα. Επειδή οι εσωτερικοί κόμβοι περιέχουν μόνο κλειδιά και διευθύνσεις, ο λόγος διακλάδωσης είναι πολύ μεγάλος. Έτσι αυτά τα δένδρα είναι ρηχά και εξαιρετικά πλατιά. Αυτός είναι ο βασικός λόγος που τα B$^+$-δένδρα είναι τόσο αποτελεσματικά. Μάλιστα τα B$^+$-δένδρα είναι η πιο κατάλληλη δομή για ερωτήσεις διαστήματος (ενώ όπως θα φανεί σε επόμενα κεφάλαια η πιο κατάλληλη δομή για απλές ερωτήσεις στηρίζεται στον κατακερματισμό).

Η δομή του B$^+$-δένδρου που επεξηγήθηκε προηγουμένως είναι μία περίπτωση πρωτεύοντος καταλόγου, δηλαδή καταλόγου με βάση το πρωτεύον κλειδί. Στην περίπτωση αυτή, ο πρωτεύων κατάλογος καθορίζει τον τρόπο αποθήκευσης των εγγραφών. Αν οι εγγραφές είναι αποθηκευμένες σε γειτονικούς κάδους κατά απόλυτη τάξη του κλειδιού τους, τότε ο κατάλογος λέγεται **συμπαγής** (clustered). Έτσι, στο ανώτερο επίπεδο από τα φύλλα ο κατάλογος περιέχει μόνο την τιμή του μικρότερου (ή μεγαλύτερου) κλειδιού κάθε κάδου. Για το λόγο αυτό, ο κατάλογος αυτός λέγεται και **αραιός** (sparse). Για παράδειγμα, ο κατάλογος ενός αρχείου ISAM είναι ένας αραιός κατάλογος.

Ωστόσο, το B$^+$-δένδρο μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ως δευτερεύων κατάλογος. Στο Σχήμα 8.13 δίνεται ένα παράδειγμα, όπου οι εγγραφές αναφέρονται σε στοιχεία βαλκανικών κρατών (που δίνονται στον Πίνακα 8.2). Πιο συγκεκριμένα, πρωτεύον κλειδί είναι το όνομα του κράτους, ενώ δευτερεύοντα κλειδιά είναι ο πληθυσμός (σε εκατομμύρια κατοίκους) και η έκταση (σε χιλιάδες τετραγωνικών χιλιομέτρων). Έτσι στο επάνω μέρος του σχήματος φαίνεται η δομή του πρωτεύοντος καταλόγου, ενώ στο κάτω

Χώρα	Πληθυσμός	Έκταση
Αλβανία (A)	3	29
Βοσνία-Ερζεγοβίνη (Bh)	4	51
Βουλγαρία (B)	8	110
Γιουγκοσλαβία (Y)	10	102
Ελλάδα (G)	10	132
Κροατία (C)	5	56
Κύπρος (CY)	1	9
ΠΓΔΜ (F)	2	25
Ρουμανία (R)	23	237
Σλοβενία (S)	2	20

Πίνακας 8.2: Πληθυσμός και έκταση των Βαλκανικών κρατών.



Σχήμα 8.13: B^+-δένδρο ως πρωτεύων και δευτερεύων κατάλογος.

μέρος του σχήματος διακρίνεται ο δευτερεύων κατάλογος που είναι οργανωμένος με βάση το πεδίο της έκτασης. Στο τελευταίο επίπεδο του καταλόγου αυτού υπάρχουν αποθηκευμένα ζεύγη κλειδιών-δεικτών, όπου οι δείκτες σηματοδοτούν προς τις αντίστοιχες εγγραφές του πρωτεύοντος καταλόγου. Ο κατάλογος αυτός δεν είναι αραιός, αλλά αντίθετα λέγεται **πυκνός** (dense).

Συχνά για το ίδιο αρχείο υπάρχουν πολλοί δευτερεύοντες κατάλογοι, που αντιστοιχούν σε διαφορετικά πεδία της εγγραφής. Έτσι διευκολύνεται η αναζήτηση με βάση είτε το πρωτεύον, είτε το δευτερεύον κλειδί. Όμως αν μία εγγραφή έχει πολλά πεδία, δεν είναι απαραίτητο να δημιουργηθεί ένας κατάλογος για κάθε πεδίο, γιατί έτσι:

- η ίδια πληροφορία θα επαναλαμβανόταν δύο φορές και θα χρειαζόταν πολλαπλάσιος χώρος από το χώρο των κυρίως δεδομένων, και
- το κόστος ενημέρωσης των καταλόγων θα ήταν ιδιαίτερα μεγάλο ακόμη και για μία απλή εισαγωγή νέας εγγραφής.

Ευθύνη του σχεδιαστή των αρχείων είναι να αποφασίσει το πόσους και ποιούς καταλόγους πρέπει να δημιουργήσει, γιατί αν γίνει ερώτηση με βάση δευτερεύον κλειδί για το οποίο δεν υπάρχει αντίστοιχος κατάλογος, τότε η αναζήτηση ταυτίζεται με την αναζήτηση σε αρχείο σωρού. Ας σημειωθεί, επίσης, ότι τα αρχεία ISAM δεν μπορούν να χρησιμεύσουν ως δευτερεύοντες κατάλογοι.

Η αναζήτηση σε B^+-δένδρα γίνεται με την εξής μέθοδο. Ξεκινώντας από τη ρίζα, οι δείκτες προς το κατώτερο επίπεδο ονομάζονται από 0 ως k και τα κλειδιά από 1 ως k. Αν το κλειδί που αναζητείται είναι μικρότερο από το πρώτο κλειδί της ρίζας, τότε λαμβάνεται ο δείκτης υπ' αριθμό 0. Γενικά, αν το αναζητούμενο κλειδί είναι μεγαλύτερο από το i-οστό κλειδί και μικρότερο από το $(i+1)$-οστό κλειδί, τότε ακολουθείται ο i-οστός δείκτης. Η διαδικασία αυτή εκτελείται για όλα τα επίπεδα του δένδρου. Έτσι η αναζήτηση φθάνει στα φύλλα, όπου εντοπίζεται η σχετική εγγραφή αν το B^+-δένδρο είναι πρωτεύων κατάλογος, ενώ αν το B^+-δένδρο είναι δευτερεύων κατάλογος τότε ακολουθείται ο σχετικός δείκτης προς την αντίστοιχη εγγραφή.

8.4.1 Προσπέλαση εγγραφής

Έστω ότι το B^+-δένδρο χρησιμοποιείται ως πρωτεύων κατάλογος. Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί, ότι όταν ανοίγει το αρχείο, τότε όλοι οι κόμβοι εκτός των κόμβων των δύο τελευταίων επιπέδων αποθηκεύονται στην κύρια μνήμη. Συνεπώς, το κόστος διάσχισης των επιπέδων αυτών είναι αμελητέο. Απαιτείται μία προσπέλαση για τον κόμβο που βρίσκεται επάνω από το κατάλληλο φύλλο και άλλη μία προσπέλαση για το φύλλο. Άρα το σχετικό κόστος είναι:

$$T_{\pi\rho o\sigma} = (s + r + btt) + (s + r + dtt)$$

῞Εστω, τώρα, ότι το B^+-δένδρο χρησιμοποιείται ως δευτερεύων κατάλογος. Είναι εύλογο να υποτεθεί ότι στην κύρια μνήμη χωρούν όλα τα επίπεδα του δένδρου πλην του τελευταίου που περιέχει τους δείκτες προς τους κάδους. ῞Ετσι, και στην περίπτωση αυτή το χρονικό κόστος δίνεται από την προηγούμενη έκφραση. Σε κάθε περίπτωση, το σημαντικό συμπέρασμα είναι ότι η αναζήτηση σε B^+-δένδρο απαιτεί δύο προσπελάσεις στο δίσκο.

8.4.2 Εξαντλητική ανάγνωση αρχείου

Κάθε κόμβος περιέχει το ελάχιστο και το μέγιστο d και $2d$ κλειδιά αντίστοιχα, όμως έχει αποδειχθεί οτι κατά μέσο όρο περιέχει $2d \times \ln 2$ κλειδιά. Συνεπώς, ο αριθμός των κάδων που απαιτούνται για την αποθήκευση του B^+-δένδρου είναι:

$$\frac{n}{Bkfr \times \ln 2} \;=\; bk$$

όπου n είναι ο αριθμός των εγγραφών του αρχείου. Ο απαιτούμενος χρόνος για την εξαντλητική ανάγνωση ενός B^+-δένδρου που χρησιμεύει ως πρωτεύων κατάλογος είναι:

$$T_{\text{εξαν}}\,(\text{πρωτεύων}) \;=\; bk \times (s + r + dtt) \;=\; \frac{n \times (s + r + dtt)}{Bkfr \times \ln 2}$$

Αυτός ο τύπος προϋποθέτει ότι σε κάθε φύλλο υπάρχει ένας δείκτης προς το επόμενο φύλλο. Αν αυτή η συνθήκη δεν ισχύει, τότε εναλλακτικά μπορεί να εφαρμοσθεί μία ενδοδιατεταγμένη διάσχιση με αμελητέο επιπλέον χρονικό κόστος. Για παράδειγμα, αν υποτεθεί ότι ο βαθμός του δένδρου είναι 100, τότε ο λόγος διακλάδωσης είναι 140. ῎Αρα, για κάθε 140 φύλλα πρέπει να γίνει μία ακόμη προσπέλαση στον κόμβο πατέρα.

Πρέπει να σημειωθεί ότι το χρονικό κόστος που προκύπτει από τη σχέση αυτή είναι μεγαλύτερο από το κόστος εξαντλητικής ανάγνωσης ενός σειριακού ταξινομημένου αρχείου, επειδή οι διαδοχικές εισαγωγές και διαγραφές συντελούν στη φυσική απομάκρυνση λογικά διπλανών κόμβων. ῞Ετσι, απαιτούνται συνεχώς νέες προσπελάσεις με κόστος εντοπισμού του κατάλληλου κυλίνδρου.

Ο απαιτούμενος χρόνος για την εξαντλητική ανάγνωση ενός B^+-δένδρου που χρησιμεύει ως δευτερεύων κατάλογος είναι:

$$T_{\text{εξαν}}\,(\text{δευτερεύων}) \;=\; n \times (s + r + dtt) + n \times \frac{s + r + btt}{2d \times \ln 2}$$

Ο πρώτος όρος αναφέρεται στο κόστος ανάγνωσης των εγγραφών μία προς μία, ενώ ο δεύτερος αναφέρεται στο κόστος ανάγνωσης του τελευταίου επιπέδου του B^+-δένδρου. Ο δεύτερος όρος είναι σημαντικά μικρότερος και μπορεί να παραλειφθεί.

8.4.3 Προσπέλαση επόμενης εγγραφής

Έστω και πάλι ότι το B^+-δένδρο χρησιμοποιείται ως πρωτεύων κατάλογος και ότι υπάρχουν δείκτες από το ένα φύλλο προς το άλλο. Το χρονικό κόστος για την ανάκτηση της επόμενης εγγραφής είναι:

$$T_{\text{επομ}}\ (\text{πρωτεύων}) \;=\; \frac{s + r + dtt}{Bkfr \times \ln 2}$$

Η σχέση αυτή εξηγείται με βάση το γεγονός ότι $1/(Bkfr \times \ln 2)$ είναι η πιθανότητα η επόμενη εγγραφή να βρίσκεται στον ίδιο κόμβο με την προηγούμενη.

Αν το B^+-δένδρο χρησιμοποιείται ως δευτερεύων κατάλογος, τότε απαιτείται τουλάχιστο μία προσπέλαση κόμβου για την εύρεση της επόμενης εγγραφής. Επιπλέον μπορεί να απαιτηθεί μία προσπέλαση στο επόμενο φύλλο για την εύρεση της διεύθυνσης αυτού του κόμβου. Άρα, τελικά, το χρονικό κόστος για την ανάκτηση της επόμενης εγγραφής είναι:

$$T_{\text{επομ}}\ (\text{δευτερεύων}) \;=\; (s + r + dtt) \;+\; \frac{s + r + btt}{2d \times \ln 2}$$

Ο πρώτος όρος δίνει το κόστος για την εύρεση του επόμενου κάδου όταν η διεύθυνσή του είναι γνωστή. Ο δεύτερος όρος προκύπτει από το γεγονός ότι είναι πιθανό αυτή η διεύθυνση να μην είναι γνωστή. Στην περίπτωση αυτή, γνωστή είναι μόνο η διεύθυνση της σελίδας, όπου είναι αποθηκευμένη η διεύθυνση της επόμενης εγγραφής. Και πάλι, ο δεύτερος όρος είναι λιγότερο σημαντικός από τον πρώτο και η σχέση μπορεί να απλοποιηθεί.

8.4.4 Εισαγωγή εγγραφής

Οι εισαγωγές στο B^+-δένδρο γίνονται στο τελευταίο επίπεδο. Μία εισαγωγή πάντα αρχίζει με αναζήτηση του κλειδιού που πρόκειται να εισαχθεί, ώστε να εντοπισθεί ο κατάλληλος κόμβος. Αν το κλειδί βρίσκεται ήδη στο αρχείο αποφεύγεται ένα λάθος. Αν υπάρχει διαθέσιμος χώρος μέσα στον κόμβο, τότε το κλειδί (ή η εγγραφή) αποθηκεύεται. Στην απλούστερη, λοιπόν, περίπτωση το κόστος μίας εισαγωγής είναι:

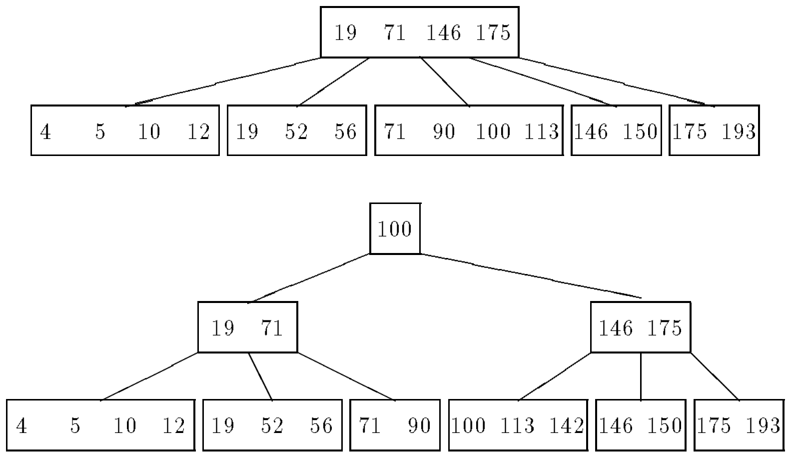
$$T_{\text{εισ}} = T_{\text{προσ}} + 2r$$

Όμως είναι δυνατόν να υπάρξει διάσπαση κόμβου λόγω υπερχείλισης, και αυτή η διαδικασία να συνεχισθεί μέχρι την κορυφή. Για παράδειγμα, έστω ότι το B$^+$-δένδρο χρησιμοποιείται ως πρωτεύων κατάλογος και ότι σε έναν κόμβο συγκεντρώνονται $Bkfr$+1 εγγραφές. Οι πρώτες μισές και οι δεύτερες μισές εγγραφές αυτού του συνόλου αποθηκεύονται στον παλιό και σε νέο κόμβο, αντίστοιχα. Δηλαδή, αν $Bkfr$=5 τότε κάθε κόμβος δέχεται από τρεις εγγραφές. Αν $Bkfr$=10, τότε ο παλιός και ο νέος κόμβος δέχονται 5 και 6 εγγραφές, αντίστοιχα. Στην περίπτωση αυτή είναι φανερό ότι οι δύο κόμβοι είναι πλήρεις κατά 50%. Αυτός είναι ένας λόγος που το αρχείο αυτό καταλαμβάνει περισσότερο χώρο από ένα αρχείο σωρού.

Αν το B$^+$-δένδρο χρησιμοποιείται ως δευτερεύων κατάλογος, τότε κάθε φύλλο πρέπει να περιέχει από d ως $2d$ κλειδιά. Έτσι, στον παλιό και στο νέο κόμβο αποθηκεύονται d και d+1 κλειδιά, αντίστοιχα. Και στις δύο περιπτώσεις, η τιμή του μικρότερου κλειδιού του νέου κόμβου καθώς και η διεύθυνση του νέου κόμβου πρέπει να ανέλθουν προς τον κόμβο πατέρα. Αν αυτό το ζεύγος που αντλείται προς τα επάνω δεν χωρά στον πατέρα κόμβο, τότε πρέπει να γίνει νέα διάσπαση. Ωστόσο, στο σημείο αυτό υπάρχει η εξής μικρή διαφορά. Όταν στους εσωτερικούς κόμβους υπάρξει διάσπαση, τότε τα πρώτα d κλειδιά αποθηκεύονται στον παλιό κόμβο, τα τελευταία d (και όχι d+1) κλειδιά αποθηκεύονται στο νέο κόμβο, ενώ το μεσαίο κλειδί αντλείται προς το ανώτερο επίπεδο. Δηλαδή, η διαφορά έγκειται στο γεγονός ότι το ανερχόμενο κλειδί αποθηκεύεται και σε ένα νέο κόμβο του τελευταίου επιπέδου αλλά δεν συμβαίνει το ίδιο και στα ανώτερα επίπεδα. Η διαδικασία αυτή μπορεί να συνεχισθεί μέχρι τη ρίζα. Στο Σχήμα 8.14 δίνεται ένα παράδειγμα εισαγωγής του κλειδιού 142 στο B$^+$-δένδρο που είναι βαθμού 2.

Το κόστος εισαγωγής είναι συνάρτηση των διασπάσεων που θα συμβούν. Ο Baeza-Yates (1989) επεκτείνοντας την ανάλυση κρασπέδου των Eisenbarth et al. κατέληξε ότι η πιθανότητα να συμβούν περισσότερες από μία διασπάσεις κατά την εισαγωγή σε ένα B$^+$-δένδρο είναι:

$$\frac{1}{Bkfr \times \ln 2} + \mathrm{O}(Bkfr^{-2})$$



Σχήμα 8.14: Εισαγωγή σε B$^+$-δένδρο με d=2 και $Bkfr$=4.

Στην περίπτωσή μας θεωρείται προσεγγιστικά ότι είναι ισοπίθανο σε ένα φύλλο να είναι αποθηκευμένες $Bkfr/2$, ..., $Bkfr$ εγγραφές. Η πιθανότητα μία νέα εγγραφή να μην χωρά σε κάποιο φύλλο είναι $\frac{1}{Bkfr/2} = \frac{2}{Bkfr}$. Άρα, η πιθανότητα μία νέα εγγραφή να χωρά στο φύλλο είναι $1-\frac{2}{Bkfr}$. Με το ίδιο σκεπτικό η πιθανότητα να διασπασθεί ο πατρικός κόμβος είναι $1/d$. Συνεπώς, θεωρώντας ότι όλα τα επίπεδα του δένδρου πλην των δύο τελευταίων είναι αποθηκευμένα στην κύρια μνήμη, τελικά προκύπτει ότι το κόστος εισαγωγής σε B$^+$-δένδρο είναι:

$$T_{\text{εισ}} \;=\; T_{\text{προσ}} + 2r + \frac{2}{Bkfr} \times \left((s + r + dtt) + (s + r + btt) + \frac{s + r + btt}{d} \right)$$

Επειδή ο βαθμός του δένδρου είναι μεγάλος (πχ. d=100), μπορεί η σχέση να απλοποιηθεί:

$$T_{\text{εισ}} \;=\; \left(1 + \frac{2}{Bkfr}\right) \times T_{\text{προσ}} + 2r$$

Αν $Bkfr$=10 και το μέγεθος της σελίδας είναι 2400 bytes, τότε προκύπτει ότι ο απαιτούμενος χρόνος για μία εισαγωγή είναι:

$$T_{\text{εισ}} \;=\; \left(1 + \frac{2}{5}\right) \times 25,1 + 16,6 \;=\; 77 \text{ ms}$$

Από αυτά τα 77 ms, τα 10 περίπου οφείλονται στη διάσπαση.

Αν το B$^+$-δένδρο χρησιμοποιείται ως δευτερεύων κατάλογος, τότε πρέπει ο όρος $2/Bkfr$ να αντικατασταθεί με τον όρο $1/d$. Άρα:

$$T_{\varepsilon\iota\sigma}\ (\text{δευτερεύων}) \;=\; \left(1+\frac{1}{d}\right)\times(s+r+btt) \;+\; 2r$$

Επειδή ο λόγος διακλάδωσης ενός B$^+$-δένδρου, που χρησιμοποιείται ως δευτερεύων κατάλογος, είναι μεγάλος και η πιθανότητα διάσπασης είναι μικρή ο τύπος αυτός απλοποιείται σε:

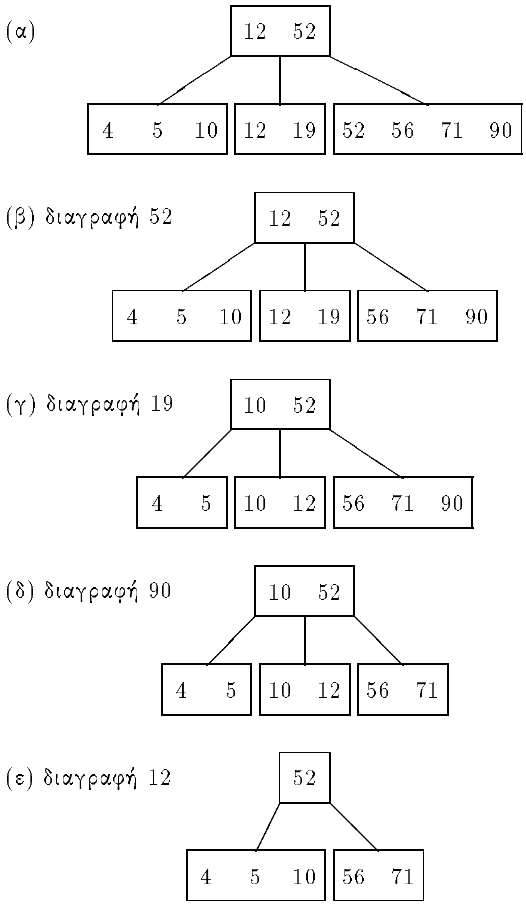
$$T_{\varepsilon\iota\sigma}\ (\text{δευτερεύων}) \;=\; s+3r+btt$$

Όταν γίνεται μία εισαγωγή στον πρωτεύοντα κατάλογο, πρέπει να ενημερωθούν όλοι οι δευτερεύοντες κατάλογοι. Η ενημέρωση των δευτερευόντων καταλόγων είναι προβληματική, επειδή κατά τη διάσπαση ενός κόμβου πολλές εγγραφές αλλάζουν διεύθυνση. Για το λόγο αυτό, πολλά συστήματα διαχείρισης αρχείων δεν κρατούν μαζί με το δευτερεύον κλειδί την αντίστοιχη διεύθυνση αλλά την τιμή του πρωτεύοντος κλειδιού. Το πλεονέκτημα των συστημάτων αυτών είναι ότι δεν ενημερώνονται για κάθε εισαγωγή όλοι οι δευτερεύοντες κατάλογοι. Από την άλλη πλευρά, το μειονέκτημα είναι ότι για την εύρεση μίας εγγραφής με βάση το δευτερεύον κλειδί πρέπει να γίνει προσπέλαση και στους δύο καταλόγους.

8.4.5 Διαγραφή εγγραφής

Η διαχείριση των διαγραφών σε ένα B$^+$-δένδρο είναι δύσκολο πρόβλημα. Σύμφωνα με τον ορισμό δεν πρέπει η περιεκτικότητα των κόμβων του B$^+$-δένδρου να είναι κατώτερη του 50%. Άρα, όταν λόγω διαγραφής ένας κόμβος μείνει με λιγότερο από d κλειδιά ή $Bkfr/2$ εγγραφές, τότε πρέπει αυτός ο κόμβος να συγχωνευθεί. Υπάρχουν πολλές περιπτώσεις διαγραφών.

Η πρώτη και απλούστερη περίπτωση είναι όταν μετά τη διαγραφή κάποιος κόμβος δεν έχει λιγότερες εγγραφές από $Bkfr/2$ εγγραφές ή d κλειδιά. Αν από τα φύλλα διαγραφεί κάποια εγγραφή με κλειδί που είναι αποθηκευμένο σε κάποιο ανώτερο επίπεδο ως τιμή σύγκρισης, τότε δεν δημιουργείται πρόβλημα, γιατί και πάλι η αναζήτηση διαμέσου των επιπέδων του δένδρου είναι σωστή. Στο Σχήμα 8.15β αυτή η περίπτωση αντιστοιχεί στη διαγραφή της εγγραφής με κλειδί 52.

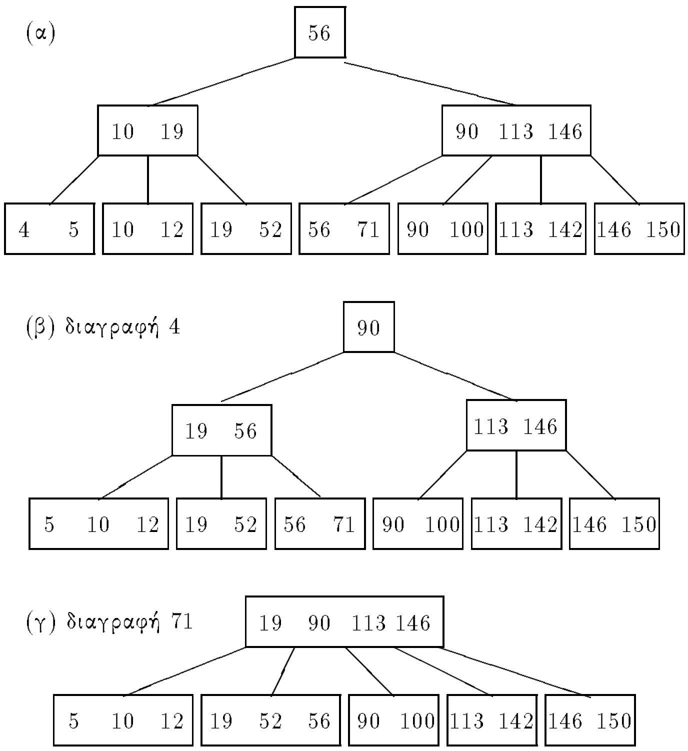


Σχήμα 8.15: Διαγραφές σε B^+-δένδρο με d=2 και $Bkfr$=4.

Αν ένα φύλλο απομείνει με λιγότερες από $Bkfr/2$ εγγραφές, τότε ελέγχεται αν ένας γειτονικός κόμβος (με προτεραιότητα εξετάζεται ο αριστερός) έχουν περισσότερο από αυτό το όριο. Αν κάποιος, λοιπόν, αδελφός κόμβος έχει περισσότερο από το όριο, τότε οι εγγραφές των δύο κόμβων μοιράζονται εξίσου μεταξύ τους και ταυτόχρονα ενημερώνεται ο πατέρας κόμβος. Αυτή η διαδικασία παρουσιάζεται στο Σχήμα 8.15γ με τη διαγραφή της εγγραφής 19. Κατόπιν έστω ότι διαγράφεται η εγγραφή 90. Αυτή η περίπτωση είναι παρόμοια με την περίπτωση της διαγραφής της εγγραφής 52. Η νέα μορφή του B^+-δένδρου φαίνεται και πάλι στο Σχήμα 8.15δ.

῎Εστω τώρα ότι πρέπει να διαγραφεί η εγγραφή 12. Είναι φανερό ότι κανείς από τους γειτονικούς αδελφούς κόμβους δεν μπορεί να συνεισφέρει. Επιλέγεται ο αριστερός κόμβος για συγχώνευση. Οι εγγραφές των δύο κόμβων επανα-αποθηκεύονται στον έναν κόμβο, ενώ ο άλλος αποδίδεται στο σύστημα. Ταυτόχρονα, ενημερώνεται και ο πατέρας κόμβος, όπου διαγράφεται ένα κλειδί και ο αντίστοιχος δείκτης. Αυτή η διαδικασία παρουσιάζεται στο Σχήμα 8.15δ.

Μέχρι στιγμής δεν εξετάσθηκαν οι εσωτερικοί κόμβοι. Πράγματι, είναι απίθανο κάποιος εσωτερικός κόμβος να καταλήξει με λιγότερο από d κλειδιά, αφού όπως είναι γνωστό κατά μέσο όρο οι εσωτερικοί κόμβοι έχουν $2d \times \ln 2$ κλειδιά. Αν d=100, τότε $2d \times \ln 2 = 140$ και συνεπώς ο κόμβος αυτός πρέπει να χάσει 40 κλειδιά. Ωστόσο, για λόγους πληρότητας πρέπει να αναφερθούν τα εξής.



Σχήμα 8.16: Διαγραφές σε B^+-δένδρο με d=2 και $Bkfr$=4.

῾Εστω ότι ένας εσωτερικός κόμβος μένει με λιγότερο από d κλειδιά. Ελέγχονται οι αδελφοί κόμβοι (με προτεραιότητα στον αριστερό) αν περιέχουν περισσότερα κλειδιά από το όριο. Αν κάποιος αδελφός έχει περισσότερα κλειδιά από το όριο, τότε τα κλειδιά του κόμβου αυτού, το κλειδί του πατέρα κόμβου που χωρίζει τους δύο αδελφούς και τα κλειδιά του υπ΄ όψη κόμβου αναδιανέμονται στους δύο κόμβους. Το μεσαίο κλειδί από αυτό το σύνολο κλειδιών ανέρχεται στον πατέρα κόμβο. Αν και οι δύο αδελφοί κόμβοι έχουν ακριβώς d κλειδιά, τότε πρέπει να γίνει συγχώνευση (κατά προτεραιότητα με τον αριστερό). Τα κλειδιά αυτά επανα-αποθηκεύονται στον ένα κόμβο, ο άλλος κόμβος αποδίδεται στο σύστημα, ενώ το αντίστοιχο κλειδί και ο σχετικός δείκτης διαγράφονται από τον πατέρα κόμβο. Αν και ο πατέρας κόμβος με τη σειρά του απομείνει με λιγότερο από d κλειδιά, τότε το πρόβλημα μεταφέρεται κατά ένα επίπεδο προς τη ρίζα. Στο Σχήμα 8.16 παρουσιάζεται ένα παράδειγμα διαγραφής σε B$^+$-δένδρο που καταλήγει σε συγχώνευση εσωτερικών κόμβων.

Ακολουθεί η ανάλυση για τη διαγραφή σε B$^+$-δένδρο που χρησιμοποιείται ως πρωτεύων κατάλογος. Το κόστος διαγραφής της απλής (και πιο συνηθισμένης περίπτωσης) είναι:

$$T_{\text{διαγ}}\ (\text{πρωτεύων}) \;=\; T_{\text{προσ}} \;+\; 2r$$

Στη δεύτερη περίπτωση γίνεται αναδιανομή των εγγραφών των γειτονικών κόμβων και του πατέρα κόμβου. Στην περίπτωση αυτή απαιτείται επιπλέον προσπέλαση των δύο αδελφών, ενώ ο πατέρας κόμβος έχει ήδη προσπελασθεί, και επανεγγραφή των τριών κόμβων συνολικά. Η πιθανότητα το φύλλο να είναι γεμάτο κατά το ήμισυ είναι $2/Bkfr$. Εύκολα προκύπτει ότι το σχετικό χρονικό κόστος είναι:

$$T_{\text{διαγ}}\ (\text{πρωτεύων}) \;=\; T_{\text{προσ}} \;+\; 4\times(s+r+dtt) \;+\; (s+r+btt)$$

Αν και οι δύο αδελφοί κόμβοι περιέχουν ακριβώς d κλειδιά, τότε το σχετικό κόστος είναι:

$$T_{\text{διαγ}}\ (\text{πρωτεύων}) \;=\; \left(1+\frac{4}{Bkfr}\right)\times T_{\text{προσ}} \;+\; (s+r+btt)$$

Αν το B$^+$-δένδρο χρησιμοποιείται ως δευτερεύων κατάλογος, τότε ο όρος $2/Bkfr$ αντικαθίσταται από τον όρο $1/d$. Το κόστος διαγραφής είναι:

$$T_{\text{διαγ}}\ (\text{δευτερεύων}) \;=\; \left(1+\frac{3}{d}\right)\times(s+r+btt) \;+\; 2r$$

Επειδή το d είναι αρκετά μεγάλο, ο τύπος μπορεί να απλοποιηθεί:

$$T_{\text{διαγ}}\ (\text{δευτερεύων}) \;=\; s + 3r + btt$$

8.5 `Αλλες παραλλαγές των B-δένδρων

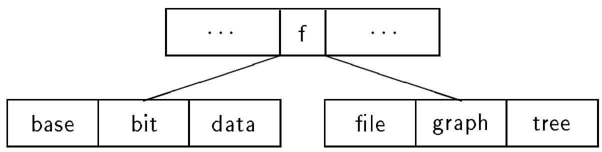
Από τα B-δένδρα έχει προέλθει μία μεγάλη ομάδα ενδιαφέρουσων παραλλαγών. Μεταξύ των άλλων στη βιβλιογραφία αναφέρονται οι εξής παραλλαγές: τα **B-δένδρα με κλειδιά μεταβλητού μήκους** (B-trees with variable length entries), τα B-δένδρα μικρής τάξης, τα **Δυαδικά B-δένδρα** (Binary B-trees), τα **Συμμετρικά Δυαδικά B-δένδρα** (Symmetric Binary B-trees) και τα **Προθεματικά B$^+$-δένδρα** (Prefix B$^+$-trees). Αναφορά-κλειδί για την οικογένεια αυτή των παραλλαγών είναι η επισκόπηση του Comer (1979), όπου το B-δένδρο χαρακτηρίζεται ως `πανταχού παρόν'. Στη συνέχεια θα γίνει εκτενέστερη αναφορά στα Προθεματικά B$^+$-δένδρα, ενώ για τις υπόλοιπες δομές δίνονται μόνο λίγα κατατοπιστικά στοιχεία.

Αν τα κλειδιά είναι μεταβλητού μήκους (πχ. συμβολοσειρές), τότε είναι δυνατόν για δεδομένη ομάδα κλειδιών να κατασκευασθεί ένα B-δένδρο με περιεκτικότητα κόμβων τουλάχιστον 50% (McCreigh 1977). Δηλαδή, στο δένδρο αυτό δεν έχει σημασία ο αριθμός των κλειδιών που περιέχει (δεν χαρακτηρίζεται από κάποια τάξη), αλλά το συνολικό μήκος των κλειδιών. `Εχουν προταθεί αρκετοί αλγόριθμοι κατασκευής τέτοιων δένδρων που αποσκοπούν στην ελαχιστοποίηση του ύψους του δένδρου και του συνολικού αριθμού κόμβων και συνεπώς στην ελαχιστοποίηση του χρόνου αναζήτησης. Γενικά, για να επιτευχθεί αυτός ο σκοπός θα πρέπει τα μικρού μεγέθους κλειδιά να αποθηκευθούν προς τη ρίζα, ώστε ο λόγος διακλάδωσης στα υψηλά επίπεδα να είναι μεγάλος. Το χαρακτηριστικό της δομής αυτής και των σχετικών αλγορίθμων είναι ότι εφαρμόζονται μόνο σε στατικά και γνωστά από την αρχή δεδομένα.

Στην κατηγορία των B-δένδρων μικρής τάξης εμπίπτουν πολλές παραλλαγές. Τα **2-3 δένδρα** και τα **1-2 δένδρα** είναι B-δένδρα τάξης 3 και 2 αντίστοιχα, δηλαδή περιέχουν 1 ως 2 και 0 ως 1 εγγραφές αντίστοιχα. Τα **2-3 δένδρα αδελφών** (2-3 Brother tres) είναι 2-3 δένδρα με τον επιπρόσθετο περιορισμό ότι ένας κόμβος με μία εγγραφή πρέπει να έχει οπωσδήποτε αδελφό κόμβο με δύο εγγραφές. Παρόμοιος περιορισμός ισχύει και στα **1-2 δένδρα αδελφών**. Τα **2-3 δένδρα υιών** (2-3 Son trees) είναι 2-3 δένδρα με τον επιπρόσθετο περιορισμό ότι δεν μπορεί να υπάρξει ένα ζεύγος κόμβων με σχέση πατέρα-παιδιού, όπου και οι δύο κόμβοι να έχουν μία μόνο εγγραφή. Παρόμοιος περιορισμός ισχύει για τα **1-2 δένδρα υιών** (1-2 Son trees). Είναι ευχολονόητο ότι οι περιορισμοί αυτοί καθιστούν δύσκολο καθήκον την ανάπτυξη των σχετικών αλγορίθμων διαχείρισης των δομών. `Ολες αυτές οι παραλλαγές αποτελούν περισσότερο θεωρητικές αναζητήσεις παρά οργανώσεις με πρακτική εφαρμογή. Ο ενδιαφέρομενος αναγνώστης για τις δομές αυτές μπορεί να ανατρέξει στο βιβλίο του Gonnet, όπου θα βρει περισσότερα στοιχεία και αναφορές.

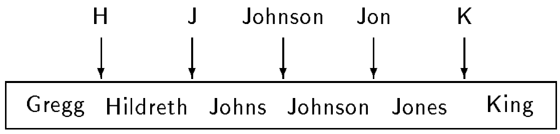
Τα Δυαδικά Β-δένδρα είναι μία συγκεκριμένη υλοποίηση των 2-3 δένδρων με χρήση συνδεδεμένων λιστών μέσα σε κάθε κόμβο (Bayer 1972). `Ετσι στη δομή συνυπάρχουν οι δενδρικοί δείκτες και οι δείκτες των κόμβων και τελικά το δένδρο μοιάζει με ένα απλό δυαδικό δένδρο. Στην εκδοχή αυτή ο δεξιός δενδρικός κόμβος μπορεί να καταστεί οριζόντιος προς τον αδελφό κόμβο, επομένως σε κάθε εγγραφή χρειάζεται και ένα επιπλέον πεδίο που δηλώνει αν ο δεξιός δείκτης είναι κατακόρυφος ή οριζόντιος. Τα Συμμετρικά Δυαδικά Β-δένδρα επιτρέπουν και τον αριστερό δείκτη να είναι οριζόντιος (Bayer 1973). Μάλιστα σημειώνεται ότι τα δένδρα AVL είναι υποπερίπτωση των Συμμετρικών Δυαδικών Β-δένδρων. Στο βιβλίο του Wirth υπάρχουν περισσότερα στοιχεία σχετικά με τους αλγορίθμους διαχείρισης των δένδρων αυτών.

`Ολες αυτές οι παραλλαγές είναι δομές που λόγω επίδοσης αναφέρονται κυρίως στην κύρια μνήμη. Αντίθετα, τα Προθεματικά B^+-δένδρα, που προτάθηκαν από τους Bayer και Unteraurer (1977), έχουν παρόμοια δομή με τα B^+-δένδρα και είναι μία άλλη παραλλαγή για υλοποίηση κυρίως σε δευτερεύουσα μνήμη. Η βασική ιδέα είναι ότι αν το κλειδί είναι συμβολοσειρά, τότε είναι προτιμότερο στους εσωτερικούς κόμβους του καταλόγου να αποθηκεύεται μόνο εκείνο το πρόθεμα του κλειδιού, το οποίο είναι απαραίτητο για τη διαδικασία αναζήτησης. `Ετσι ο κατάλογος περιέχει τους λεγόμενους **διαχωριστές** (separators) που είναι μεταβλητού μήκους. Το μήκος των διαχωριστών ποικίλει από ένα μόνο byte μέχρι και ένα πλήρες κλειδί



Σχήμα 8.17: Ελάχιστος διαχωριστής.

και εξαρτάται από τις τιμές των γειτονικών κλειδιών των εγγραφών. Ένα παράδειγμα φαίνεται στο Σχήμα 8.17, όπου ο διαχωριστής είναι ένα μόνο byte.



Σχήμα 8.18: Διαχωριστές σε Προθεματικό B^+-δένδρο.

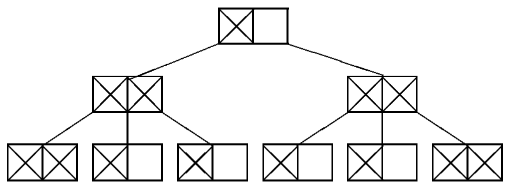
Στο Σχήμα 8.18 παρουσιάζεται ένας πλήρης κόμβος ενός Προθεματικού B^+-δένδρου με έξι κλειδιά και με τους διαχωριστές μεταξύ των κλειδιών. Έστω ότι στον κόμβο αυτόν εισάγεται ένα νέο κλειδί, το όνομα JUNG, οπότε προκαλείται υπερχείλιση και διάσπαση του κόμβου. Αν τα κλειδιά αναδιανεμηθούν εξίσου, τότε πρέπει το κλειδί JOHNSON να αποθηκευθεί σε ένα νέο κόμβο προς τα δεξιά και ο ελάχιστος διαχωριστής, το JOHNSON, να ανέλθει κατά ένα επίπεδο. Απεναντίας αν τα κλειδιά δεν διανέμονταν εξίσου στους δύο κόμβους, αλλά στον αριστερό κόμβο αποθηκεύονταν τα GREGG, HILDRETH και στο δεξιό τα JOHNS, JOHNSON κλπ., τότε ο διαχωριστής θα είναι το J. Συνεπώς η αναδιανομή των κλειδιών σε περίπτωση διάσπασης είναι θέμα βελτιστοποίησης. Εδώ υπεισέρχεται η έννοια του **διαστήματος διάσπασης** (split interval) των φύλλων, σ_{ex}, και των εσωτερικών κόμβων, σ_{in}, που ορίζεται ως ο αριθμός των bytes ή των κλειδιών προς οποιαδήποτε πλευρά του μέσου του κόμβου που θα μπορούσε να θεωρηθεί ως **σημείο διάσπασης** (split point). Το σημείο διάσπασης εκλέγεται μεταξύ του διαστήματος διάσπασης, ώστε να ελαχιστοποιηθεί ο σχετικός διαχωριστής. Αύξηση των σ_{in} και σ_{ex} επιτρέπει καλύτερη εκλογή του διαχωριστή, αλλά μπορεί να οδηγήσει σε κακή εκμετάλλευση του χώρου των φύλλων ως και λιγότερο από 50%.

Με την τεχνική αυτή όχι μόνο ελαχιστοποιείται ο χώρος που καταλαμβάνουν οι εσωτερικοί κόμβοι αλλά και η αναζήτηση γίνεται ταχύτερα. Αυτό φαίνεται εύκολα και διαισθητικά, γιατί το δένδρο έχει πλέον λιγότερα επίπεδα. Δεν αλλάζει, όμως, τίποτε σε σχέση με το B^+-δένδρο σε ότι αφορά στην αναζήτηση της επόμενης εγγραφής και της εξαντλητικής ανάγνωσης του αρχείου. Η τεχνική αυτή χρησιμοποιείται πρακτικά σε πολλά συστήματα διαχείρισης βάσεων δεδομένων.

8.6 Ασκήσεις

<1> Να δοθούν αναλυτικές εκφράσεις για τον ελάχιστο και μέγιστο αριθμό εγγραφών σε B-δένδρο τάξης M που αποτελείται από L επίπεδα.

<2> B-δένδρο τάξης m=6 περιέχει 17 εγγραφές με κλειδιά 8, 13, 26, 28, 41, 49, 54, 67, 83, 84, 96, 107, 132, 146, 151, 154, 170 και αποτελείται από τρία επίπεδα. Να σχεδιασθεί το δένδρο και να φανεί η δομή του μετά τις διαγραφές των εγγραφών με κλειδιά 83, 67 και 26.



<3> Στο B-δένδρο τάξης m=3 του προηγούμενου σχήματος, οι κατειλημμένες θέσεις από εγγραφών σημειώνονται με διαγράμμιση. Στις θέσεις αυτές να τοποθετηθούν εγγραφές με κλειδιά $P, Y, A, Q, F, W, J, T, B, L, M, D$ και U. Να σχεδιασθεί το δένδρο και να φανεί η δομή του μετά από εισαγωγή εγγραφής με κλειδί Q, διαγραφή εγγραφής με κλειδί Q, διαγραφή εγγραφής με κλειδί M και εισαγωγή εγγραφής με κλειδί C.

<4> Να σχεδιασθεί το B*-δένδρο τάξης m=6 που δημιουργείται μετά από διαδοχικές εισαγωγές των εγγραφών με κλειδιά 25, 26, 24, 39, 32, 9, 28, 45, 13, 41, 5, 23, 19, 27, 6, 14, 34, 21, 31, 11 και 28. Στη συνέχεια να σχεδιασθεί η δομή του δένδρου μετά από διαγραφές των εγγραφών με κλειδιά 26, 21, 11, 9, 45, 13, 39, 6 και 14.

<5> Να σχεδιασθεί η κλάση των BT(4,15) και BT(4,16). Να επιβεβαιωθεί ο κανόνας των βέλτιστων δένδρων.

<6> Δίνεται B$^+$-δένδρο που χρησιμεύει ως πρωτεύων κατάλογος. Ο αριθμός των κάδων του κατώτερου επιπέδου είναι bk. Στο δίσκο είναι αποθηκευμένα τα δύο κατώτερα επίπεδα του δένδρου, ενώ τα υπόλοιπα επίπεδα είναι αποθηκευμένα στην κύρια μνήμη που έχει μέγεθος 10 Mb. Αν υποτεθεί ότι ο μέσος λόγος διακλάδωσης είναι 140, τότε πόσο μεγάλο μπορεί να είναι το αρχείο ώστε ποτέ να μην υπάρξει κόστος μεγαλύτερο από 2 προσπελάσεις I/O.

<**7**> Δίνεται B^+-δένδρο που χρησιμεύει ως δευτερεύων κατάλογος. Να θεωρηθεί ότι το πλήθος των ζευγών κλειδί-δείκτης είναι 40.000.000, το μέγεθος του κλειδιού είναι 4 bytes και το μέγεθος του δείκτη είναι 6 bytes. Να υπολογισθεί ο αριθμός των επιπέδων και ο αριθμός των κόμβων ανά επίπεδο, θεωρώντας 100% και 69% χρήση του χώρου. Η άσκηση να επαναληφθεί θεωρώντας ότι το μέγεθος του κλειδιού είναι 94 bytes (και επομένως το B^+-δένρο χρησιμεύει ως πρωτεύον κατάλογος).

<**8**> Δίνεται ένα B^+-δένδρο με 6.000.000 εγγραφές των 400 bytes. Πόσος χώρος απαιτείται για το τελευταίο επίπεδο; Πόσος είναι ο απαιτούμενος χώρος για το επίπεδο επάνω από τα φύλλα, αν το ζεύγος κλειδί-δείκτης αποτελείται από 12 bytes, ενώ κάθε κάδος αποτελείται από 1 ή από 4 σελίδες; Για κάθε περίπτωση πόσος είναι ο χρόνος για την εξαντλητική του ανάγνωση;

<**9**> Έστω ότι στο αρχείο της προηγούμενης άσκησης εκτελείται μία εξαντλητική ανάγνωση κάθε 5000 απλές αναζητήσεις. Ο εσωτερικός κάδος έχει σταθερό μέγεθος μία σελίδα των 2400 bytes. Ποιό είναι το βέλτιστο μέγεθος του κάδου δεδομένων;

<**10**> Τα δεδομένα των προηγούμενων ασκήσεων είναι οργανωμένα ως πρωτεύον B^+-δένδρο και ως δευτερεύον B^+-δένδρο. Για κάθε περίπτωση ποιό είναι το βέλτιστο μέγεθος κόμβου ώστε μία ερώτηση διαστήματος που ανακτά το 5% των εγγραφών να είναι πιο οικονομική από τη σειριακή αναζήτηση ενός αρχείου σωρού;

<**11**> Για αρχείο που αποτελείται από 100.000 εγγραφές των 400 bytes κτίζεται ως δευτερεύων κατάλογος B^+-δένδρο με μέγεθος φύλλων 2400 bytes. Έστω ότι πρέπει να δοθεί λίστα εγγραφών με τιμή στο δευτερεύον πεδίο μεγαλύτερη από μία συγκεκριμένη τιμή. Αν οι κατάλληλες εγγραφές στην έξοδο είναι 25% (ή 10% ή 5%) του συνόλου των εγγραφών, μήπως είναι προτιμότερο να γίνει εξαντλητική ανάγνωση του αρχείου και κατόπιν να ταξινομηθούν οι εγγραφές πριν δοθούν στο χρήστη.

<**12**> Σε B^+-δένδρο τάξης d=1 και $Bkfr$=2 να εφαρμοσθεί διαδοχικά ο αλγόριθμος εισαγωγής για τις εγγραφές με κλειδιά 4, 12, 6, 1, 3, 15, 5, 9, 7, 14, 16, 10 και 11. Κατόπιν να γίνουν διαδοχικές διαγραφές των εγγραφών με κλειδιά 1, 3 και 4. Για τα ίδια δεδομένα να εξετασθεί ένα B^+-δένδρο τάξης d=3 και $Bkfr$=2.

<**13**> Τα δεδομένα της προηγούμενης άσκησης μπορεί να δομηθούν είτε ως αρχείο σωρού, είτε ως B^+-δένδρο. Ποιό είναι προτιμότερο αν σε κάθε 10 προσπελάσεις αντιστοιχούν 200 εισαγωγές. Να θεωρηθεί ότι $Bkfr$=6.

<**14**> Το αρχείο των 6.000.000 εγγραφών των 400 bytes είναι προτιμότερο να χτισθεί ως B^+-δένδρο με 6.000.000 εισαγωγές ή με ταξινόμηση των δεδομένων και μετά αποθήκευση;

<**15**> `Ενα αρχείο αποτελείται από 20.000 εγγραφές με κλειδί 9 bytes. Το μέγεθος της σελίδας είναι 2000 εγγραφές, ενώ ο δείκτης αποτελείται από 4 bytes. Επίσης έστωσαν δύο περιπτώσεις μήκους εγγραφής: 15 ή 180 bytes. Να θεωρηθούν οι εξής περιπτώσεις: στατικό δενδρικό αρχείο, στατικός πυκνός κατάλογος και κυρίως αρχείο, πρωτεύων και δευτερεύων κατάλογος B-δένδρου και κυρίως αρχείο. Για κάθε περίπτωση να βρεθεί το συνολικό μέγεθος σε σελίδες και το μέσο κόστος προσπέλασης.