ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ «ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ» - 6/2/2014

Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες και 50 λεπτά – **Ομάδα Α**

1. (2.5 μονάδες) Ο κ. Ζούπας παρέλαβε μία μυστηριώδη τσάντα από το ταχυδρομείο. Όταν την άνοιξε είδε ότι αυτή περιείχε 100 ζάρια (6 πλευρές) καθώς και ένα σημείωμα όπου ανέφερε ότι 99 από αυτά είναι δίκαια ενώ ένα από αυτά σε κάθε ρίψη έφερνε 6 (προσοχή: και αυτό το άδικο ζάρι έχει αριθμημένες πλευρές από το 1 έως το 6 αλλά πάντα φέρνει 6). Ο κ. Ζούπας αποφασίζει να βρει αυτό το ζάρι κάνοντας τα εξής: επιλέγει τυχαία ένα ζάρι από την τσάντα, το ρίχνει k φορές και έπειτα το βάζει πάλι πίσω στην τσάντα. Έστω ότι με $X(k)$ αναπαριστούμε αυτό το πείραμα. Ζητούνται τα εξής:

1. (7) Αν ο κ. Ζούπας εκτελεί το $X(10)$. Να βρεθούν τα εξής:
   a. Ποια είναι η πιθανότητα α να φέρουμε 10 έξι δοθέντος ότι επιλέχθηκε ένα δίκαιο ζάρι;
   b. Ποια είναι η πιθανότητα b να φέρουμε 10 έξι όταν εκτελούμε το $X(10)$; (μπορείτε να εκφράσετε το b σε σχέση με το α αν απαιτείται)
2. (8) Ο κ. Ζούπας μόλις εκτέλεσε ένα $X(10)$ και έφερε 10 έξι. Έστω c η πιθανότητα ότι επέλεξε το άδικο ζάρι δοθέντος ότι έφερε σε αυτό το πείραμα 10 έξι. Να βρείτε το c. (μπορείτε να εκφράσετε το c σε σχέση με τα α και b αν απαιτείται)
3. (10) Ο Λούπας, ο βοηθός του κ. Ζούπα, εκτελεί ένα πείραμα $X(20)$ και αναφέρει ότι οι 10 τελευταίες ρίψεις από τις 20 συνολικά που έκανε ήταν έξι. Ποια είναι η πιθανότητα f ότι και οι 10 πρώτες ρίψεις ήσαν επίσης έξι; (μπορείτε να εκφράσετε το f σε σχέση με τα α, b και c αν απαιτείται)

2. (1.5 μονάδες) Έστω ότι $S(n)$ είναι ένα κατηγόρημα στους φυσικούς αριθμούς n και έστω ότι ισχύει:

$$\forall k \in \mathbb{N}\big(S(k) \to S(k+2)\big) \quad (1)$$

Αν η (1) είναι αληθής, τότε κάποιες από τις παρακάτω προτάσεις μπορεί να ισχύουν **Π**άντα (είναι αληθείς), κάποιες μπορεί να ισχύουν **Μ**ερικές φορές (είναι ψευδείς) και κάποιες να μην ισχύουν πο**Τ**έ (είναι και αυτές οι προτάσεις ψευδείς). Να αναφέρετε για κάθε μία πρόταση αν είναι Π, Μ ή Τ με αιτιολόγηση.

1. $\forall n \geq 0\ \big(S(n)\big)$
2. $\forall n \geq 0\ \big(\neg S(n)\big)$
3. $\Big(\forall n \leq 100\ \big(S(n)\big)\Big) \wedge \Big(\forall n > 100\ \big(\neg S(n)\big)\Big)$
4. $\Big(\exists n\big(S(2n)\big)\Big) \to \big(\forall n\ S(2n+2)\big)$
5. $\Big(\exists n\big(S(n)\big)\Big) \to \Big(\forall n \exists m > n\ \big(S(m)\big)\Big)$

3. (1.5 μονάδες)

Έστω L το σύνολο όλων των επιτρεπόμενων αναγνωριστικών μεταβλητών σε μία γλώσσα προγραμματισμού. Έστω R μία σχέση στο $L \times L$ έτσι ώστε sRt αν και μόνο αν οι πρώτοι οκτώ χαρακτήρες της s ισούνται με τους πρώτους οκτώ χαρακτήρες της t. Να δείξετε ότι η R είναι σχέση ισοδυναμίας.

4. (2.5 μονάδες)
Ένας τζογαδόρος στοιχηματίζει 1 ευρώ ότι όταν ρίξει ένα δίκαιο κέρμα θα δώσει κορώνα. Κάθε φορά που το κέρμα δίνει κορώνα, κερδίζει 1 ευρώ ενώ κάθε φορά που το κέρμα δίνει γράμματα χάνει 1 ευρώ. Ο τζογαδόρος σταματά να παίζει είτε όταν δεν έχει άλλα χρήματα ή όταν έχει φτάσει να έχει M ευρώ (τον έχει θέσει σαν στόχο εκ των προτέρων). Έστω ότι P_n είναι η πιθανότητα ο τζογαδόρος να χάσει όλα τα χρήματά του όταν ξεκινά να παίζει με n ευρώ. Υποθέτοντας ότι το κέρμα είναι δίκαιο (πιθανότητα ½ για κάθε ενδεχόμενο) σας ζητούνται τα εξής:

α) Να εκφράσετε (με αιτιολόγηση) με μία αναδρομική εξίσωση την πιθανότητα P_n. (Υπόδειξη: εκφράστε το P_{n-1} ως συνάρτηση των P_n και P_{n-2} και έπειτα λύστε ως προς P_n. Στις ακραίες περιπτώσεις θα έχουμε $P_0 = 1$ και $P_M = 0$.)

β) Να βρείτε τον κλειστό τύπο της αναδρομικής εξίσωσης.

5. (1 μονάδα)

Συμπληρώστε τα κενά και κάντε τη σωστή επιλογή όπου σας ζητείται κάτι τέτοιο:

«Για να αποδείξουμε ότι $n^5 = O(\sum_{i=1}^{n} i^4)$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο ολοκληρώματος για να φράξουμε την τιμή του αθροίσματος. Συγκεκριμένα, θα πρέπει να υπολογίσουμε ένα __________________ ***(κάτω ή άνω – επιλέξτε ένα από τα δύο)*** φράγμα του αθροίσματος που είναι ίσο με την τιμή του $\int_a^b (x+c)^d dx$ όπου:

$a =$__________________, $b =$__________________, $c =$__________________ και $d =$__________________.

6. (3 μονάδες)
1. (1) Μία εταιρία θέλει να δώσει κωδικούς πρόσβασης στο προσωπικό της. Κάθε κωδικός έχει μήκος ακριβώς ίσο με 10 και περιέχει καθένα από τους εξής χαρακτήρες: σ,ν,ω,π,υ,ο,γ,ρ,ε,α (αυτό σημαίνει ότι κανένας χαρακτήρας δεν επαναλαμβάνεται). Επίσης, κανένας κωδικός δεν πρέπει να περιέχει τις λέξεις: «σπερνα», «αυγο» και «περνω»

Βρείτε το πλήθος των κωδικών που μπορούν να δημιουργηθούν (αν θέλετε χρησιμοποιήστε εγκλεισμό-αποκλεισμό).

2. (1) Δώστε μία συνδυαστική απόδειξη ότι $\sum_{i=1}^{n} i \binom{n}{i} = n2^{n-1}$ για όλους τους θετικούς ακεραίους n.

3. (1) Εστω $S=\{0,1,\ldots,9\}^{90}$ το σύνολο όλων των ακολουθιών μήκους 90 αποτελούμενο από τα ψηφία $\{0,1,2,\ldots,9\}$. Δύο ακολουθίες s_1 και s_2 λέγεται ότι έχουν την ίδια κατανομή ψηφίων αν και μόνο αν η s_1 έχει το ίδιο πλήθος εμφανίσεων για το ψηφίο j με την s_2 για κάθε $j \in \{0,1,2,\ldots,9\}$.

a. **(0.5)** Δώστε μία αντιστοιχία μεταξύ του προβλήματος μέτρησης όλων των ακολουθιών μήκους 90 διαφορετικής κατανομής ψηφίων και όλων των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να τοποθετήσουμε στη σειρά τα ψηφία 0 και 1.
b. **(0.5)** Πόσες διαφορετικές ως προς την κατανομή ψηφίων ακολουθίες μπορούμε να κατασκευάσουμε;

Καλή Επιτυχία!!!

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ «ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ» - 6/2/2014

Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες και 50 λεπτά – **Ομάδα B**

1. (1.5 μονάδες) Έστω ότι $S(n)$ είναι ένα κατηγόρημα στους φυσικούς αριθμούς n και έστω ότι ισχύει:

$$\forall k \in \mathbb{N}\big(S(k) \to S(k+2)\big) \quad (1)$$

Αν η (1) είναι αληθής, τότε κάποιες από τις παρακάτω προτάσεις μπορεί να ισχύουν **<u>Π</u>**άντα (είναι αληθείς), κάποιες μπορεί να ισχύουν **<u>Μ</u>**ερικές φορές (είναι ψευδείς) και κάποιες να μην ισχύουν πο**<u>Τ</u>**έ (είναι και αυτές οι προτάσεις ψευδείς). Να αναφέρετε για κάθε μία πρόταση αν είναι Π, Μ ή Τ με αιτιολόγηση.

1. $\big(\neg S(0)\big) \wedge \Big(\forall n \geq 1\, \big(S(n)\big)\Big)$
2. $\Big(\forall n \leq 100\, \big(\neg S(n)\big)\Big) \wedge \Big(\forall n > 100\, \big(S(n)\big)\Big)$
3. $S(0) \to \big(\forall n\, S(n+2)\big)$
4. $S(1) \to \big(\forall n\, S(2n+1)\big)$
5. $\exists n \exists m > n\big(S(2n) \wedge \neg S(2m)\big)$

2. (1 μονάδα)

Συμπληρώστε τα κενά και κάντε τη σωστή επιλογή όπου σας ζητείται κάτι τέτοιο:

«Για να αποδείξουμε ότι $n^4 = O(\sum_{i=1}^{n} i^3)$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο ολοκληρώματος για να φράξουμε την τιμή του αθροίσματος. Συγκεκριμένα, θα πρέπει να υπολογίσουμε ένα ________________ ***(κάτω ή άνω – επιλέξτε ένα από τα δύο)*** φράγμα του αθροίσματος που είναι ίσο με την τιμή του $\int_a^b (x+c)^d dx$ όπου:

$a =$________________, $b =$________________, $c =$________________ και $d =$________________.

3. (2.5 μονάδες) Ο κ. Ζούπας παρέλαβε μία μυστηριώδη τσάντα από το ταχυδρομείο. Όταν την άνοιξε είδε ότι αυτή περιείχε 200 ζάρια (6 πλευρές) καθώς και ένα σημείωμα όπου ανέφερε ότι 199 από αυτά είναι δίκαια ενώ ένα από αυτά σε κάθε ρίψη έφερνε 6 (προσοχή: και αυτό το άδικο ζάρι έχει αριθμημένες πλευρές από το 1 έως το 6 αλλά πάντα φέρνει 6). Ο κ. Ζούπας αποφασίζει να βρει αυτό το ζάρι κάνοντας τα εξής: επιλέγει τυχαία ένα ζάρι από την τσάντα, το ρίχνει k φορές και έπειτα το βάζει πάλι πίσω στην τσάντα. Έστω ότι με $X(k)$ αναπαριστούμε αυτό το πείραμα. Ζητούνται τα εξής:

1. (7) Αν ο κ. Ζούπας εκτελεί το $X(10)$. Να βρεθούν τα εξής:
   a. Ποια είναι η πιθανότητα α να φέρουμε 10 έξι δοθέντος ότι επιλέχθηκε ένα δίκαιο ζάρι;
   b. Ποια είναι η πιθανότητα b να φέρουμε 10 έξι όταν εκτελούμε το $X(10)$; (μπορείτε να εκφράσετε το b σε σχέση με το α αν απαιτείται)
2. (8) Ο κ. Ζούπας μόλις εκτέλεσε ένα $X(10)$ και έφερε 10 έξι. Έστω c η πιθανότητα ότι επέλεξε το άδικο ζάρι δοθέντος ότι έφερε σε αυτό το πείραμα 10 έξι. Να βρείτε το c. (μπορείτε να εκφράσετε το c σε σχέση με τα α και b αν απαιτείται)
3. (10) Ο Λούπας, ο βοηθός του κ. Ζούπα, εκτελεί ένα πείραμα $X(20)$ και αναφέρει ότι οι 10 τελευταίες ρίψεις από τις 20 συνολικά που έκανε ήταν έξι. Ποια είναι η πιθανότητα f ότι και οι 10 πρώτες ρίψεις ήσαν επίσης έξι; (μπορείτε να εκφράσετε το f σε σχέση με τα α,b και c αν απαιτείται)

4. (3 μονάδες)

1. (1) Δώστε μία συνδυαστική απόδειξη ότι $\sum_{i=1}^{k} i\binom{k}{i} = k2^{k-1}$ για όλους τους θετικούς ακεραίους k.

2. (1) Εστω $S=\{0,1,\ldots,9\}^{80}$ το σύνολο όλων των ακολουθιών μήκους 80 αποτελούμενο από τα ψηφία $\{0,1,2,\ldots,9\}$. Δύο ακολουθίες s_1 και s_2 λέγεται ότι έχουν την ίδια κατανομή ψηφίων αν και μόνο αν η s_1 έχει το ίδιο πλήθος εμφανίσεων για το ψηφίο j με την s_2 για κάθε $j \in \{0,1,2,\ldots,9\}$.

a. **(0.5)** Δώστε μία αντιστοιχία μεταξύ του προβλήματος μέτρησης όλων των ακολουθιών μήκους 80 διαφορετικής κατανομής ψηφίων και όλων των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να τοποθετήσουμε στη σειρά τα ψηφία 0 και 1.

b. **(0.5)** Πόσες διαφορετικές ως προς την κατανομή ψηφίων ακολουθίες μπορούμε να κατασκευάσουμε;

3. (1) Μία εταιρία θέλει να δώσει κωδικούς πρόσβασης στο προσωπικό της. Κάθε κωδικός έχει μήκος ακριβώς ίσο με 10 και περιέχει καθένα από τους εξής χαρακτήρες: σ,ν,ω,π,υ,ο,γ,ρ,ε,α (αυτό σημαίνει ότι κανένας χαρακτήρας δεν επαναλαμβάνεται). Επίσης, κανένας κωδικός δεν πρέπει να περιέχει τις λέξεις: «σπερνα», «αυγο» και «περνω».

Βρείτε το πλήθος των κωδικών που μπορούν να δημιουργηθούν (αν θέλετε χρησιμοποιήστε εγκλεισμό-αποκλεισμό).

5. (1.5 μονάδες)

Έστω L το σύνολο όλων των επιτρεπόμενων αναγνωριστικών μεταβλητών σε μία γλώσσα προγραμματισμού. Έστω R μία σχέση στο $L \times L$ έτσι ώστε sRt αν και μόνο αν οι πρώτοι επτά χαρακτήρες της s ισούνται με τους πρώτους επτά χαρακτήρες της t. Να δείξετε ότι η R είναι σχέση ισοδυναμίας.

6. (2.5 μονάδες)

Ένας τζογαδόρος στοιχηματίζει 1 ευρώ ότι όταν ρίξει ένα δίκαιο κέρμα θα δώσει γράμματα. Κάθε φορά που το κέρμα δίνει γράμματα, κερδίζει 1 ευρώ ενώ κάθε φορά που το κέρμα δίνει κορώνα χάνει 1 ευρώ. Ο τζογαδόρος σταματά να παίζει είτε όταν δεν έχει άλλα χρήματα ή όταν έχει φτάσει να έχει M ευρώ (τον έχει θέσει σαν στόχο εκ των προτέρων). Έστω ότι P_n είναι η πιθανότητα ο τζογαδόρος να χάσει όλα τα χρήματά του όταν ξεκινά να παίζει με n ευρώ. Υποθέτοντας ότι το κέρμα είναι δίκαιο (πιθανότητα ½ για κάθε ενδεχόμενο) σας ζητούνται τα εξής:

α) Να εκφράσετε (με αιτιολόγηση) με μία αναδρομική εξίσωση την πιθανότητα P_n. (Υπόδειξη: εκφράστε το P_{n-1} ως συνάρτηση των P_n και P_{n-2} και έπειτα λύστε ως προς P_n. Στις ακραίες περιπτώσεις θα έχουμε $P_0 = 1$ και $P_M = 0$.)

β) Να βρείτε τον κλειστό τύπο της αναδρομικής εξίσωσης.

Καλή Επιτυχία!!!

<u>Λύσεις</u>

(Οι λύσεις είναι ενδεικτικές)

2(A) – 1(B).

(A)

1. **Μ:** η πρόταση σημαίνει ότι η S είναι πάντα αληθής. Επομένως και το $S(k+2)$ είναι αληθές και άρα ισχύει ότι η πρόταση $S(k) \rightarrow S(k+2)$ είναι πάντα αληθής (δεδομένης της συγκεκριμένης πρότασης βέβαια). Το πρόβλημα είναι ότι ο τύπος (1) ισχύει ακόμα και όταν η S είναι πάντα ψευδής και επομένως η τρέχουσα πρόταση δεν ισχύει πάντα όταν η (1) ισχύει.
2. **Μ:** η πρόταση σημαίνει ότι η S είναι πάντα ψευδής. Επομένως και το $S(k+2)$ είναι ψευδές και άρα ισχύει ότι η πρόταση $S(k) \rightarrow S(k+2)$ είναι πάντα αληθής (δεδομένης της συγκεκριμένης πρότασης βέβαια). Το πρόβλημα είναι ότι ο τύπος (1) ισχύει ακόμα και όταν η S είναι πάντα αληθής και επομένως η τρέχουσα πρόταση δεν ισχύει πάντα όταν η (1) ισχύει.
3. **Τ:** σε αυτή την περίπτωση η S είναι αληθής μέχρι το 100 αλλά ψευδής από το 101 και μετά. Επομένως, η $S(99)$ είναι αληθής και η $S(101)$ ψευδής. Άρα $S(99) \nrightarrow S(99+2)$ και επομένως αυτή η πρόταση δεν ισχύει ποτέ.
4. **Μ:** αν η $S(k)$ ισχύει πάντα τότε η πρόταση αυτή ισχύει. Αν όμως η $S(k)$ ισχύει για άρτια $k \geq 4$ τότε η πρόταση αυτή δεν ισχύει (προσέξτε ότι στο συμπέρασμα δεν έχουμε δώσει περιορισμό αν το n που έχουμε εκεί είναι μεγαλύτερο από το n που έχουμε επιλέξει στην υπόθεση).
5. **Π:** αυτή η πρόταση αναφέρει ότι αν η S ισχύει για κάποιο n, τότε για κάθε αριθμό υπάρχει κάποιος μεγαλύτερός του m για τον οποίο η S ισχύει. Αφού η (1) αναφέρει ότι αν υπάρχει τέτοιο n για το οποίο η $S(n)$ να είναι αληθής υπάρχουν άπειρα k (αυξανόμενα) έτσι ώστε $S(k)$ να ισχύει και άρα είναι πάντα αληθής αυτή η πρόταση.

(B)

1. **Μ:** η πρόταση υπονοεί ότι η S είναι ψευδής στο 0 αλλά αληθής οπουδήποτε αλλού. Επομένως η $S(k) \rightarrow S(k+2)$ ισχύει πάντα αφού το $S(k+2)$ είναι πάντα αληθές. Επομένως, αυτή η πρόταση μπορεί να ισχύει αλλά όχι πάντα αφού το $S(0)$ μπορεί να είναι αληθές και βέβαια η (1) να συνεχίσει να ισχύει.
2. **Μ:** σε αυτή την περίπτωση η S είναι ψευδής μέχρι το 100 αλλά αληθής από το 101 και μετά. Άρα ισχύει $S(k) \rightarrow S(k+2),\ k \leq 100$ αφού η $S(k)$ είναι ψευδής και $S(k) \rightarrow S(k+2),\ k \geq 99$ αφού η $S(k+2)$ είναι αληθής. Βεβαίως η (1) ισχύει ακόμα και όταν όλα τα $S(k)$ είναι αληθή και επομένως η συγκεκριμένη πρόταση δεν ισχύει πάντα.
3. **Μ:** αν όλα τα $S(k)$ είναι αληθή τότε η πρόταση είναι αληθής. Όμως, αν η $S(k)$ είναι αληθής για άρτια n τότε η (1) συνεχίζει να ισχύει αλλά η $S(1+2)$ είναι ψευδής.
4. **Π:** αυτή η πρόταση αναφέρει ότι αν η $S(1)$ ισχύει τότε η $S(k)$ ισχύει για όλα τα περιττά k. Αυτό προκύπτει άμεσα από την (1).
5. **Τ:** αυτή η πρόταση αναφέρει ότι η S ισχύει για κάποιο άρτιο αριθμό $2n$ αλλά δεν ισχύει για κάποιον μεγαλύτερο άρτιο αριθμό $2m$. Όμως, αν η $S(2n)$ ισχύει τότε εφαρμόζοντας την (1) $m-n$ φορές δείχνουμε την αλήθεια της $S(2m)$ που είναι αντίφαση.

5(A) – 2(B).

(A)

Το άθροισμα θα πρέπει να είναι μεγαλύτερο από εn^5, για κάποια θετική σταθερά ε έτσι ώστε το n^5 να είναι O(άθροισμα). Επομένως, χρειαζόμαστε ένα ***κάτω φράγμα*** για το άθροισμα. Για να το κάνουμε αυτό επιλέγουμε τις σταθερές ώστε το ολοκλήρωμα να είναι μικρότερο από το άθροισμα και επίσης να είναι μεγαλύτερο από εn^5. Επιλέγουμε:

$$a = 0, b = n, c = 0, d = 4$$

(B)

Το άθροισμα θα πρέπει να είναι μεγαλύτερο από εn^4, για κάποια θετική σταθερά ε έτσι ώστε το n^4 να είναι O(άθροισμα). Επομένως, χρειαζόμαστε ένα ***κάτω φράγμα*** για το άθροισμα. Για να το κάνουμε αυτό επιλέγουμε τις σταθερές ώστε το ολοκλήρωμα να είναι μικρότερο από το άθροισμα και επίσης να είναι μεγαλύτερο από εn^4. Επιλέγουμε:

$$a = 0, b = n, c = 0, d = 3$$

1(A) – 3(B) (Για το (B) η λύση είναι ίδια μόνο που αντί για 100 βάζουμε 200)

1. a)

$$a = \left(\frac{1}{6}\right)^{10} = 6^{-10}$$

b)

$$b = \frac{1}{100} + \frac{99}{100}a$$

2. Έστω A το γεγονός «ο κ. Ζούπας τράβηξε το άδικο ζάρι» και έστω B το γεγονός «έφερε 10 έξι». Τότε:

$$c = \Pr\{A|B\} = \frac{\Pr\{A \cap B\}}{\Pr\{B\}} = \frac{\Pr\{B|A\} \Pr A}{\Pr\{B\}} = \frac{\frac{1}{100} \cdot 1}{b} = \frac{1}{100b}$$

3. Ορίζουμε τα εξής γεγονότα:

A= «οι πρώτες 10 ρίψεις είναι έξι»

B= «οι 10 τελευταίες ρίψεις είναι έξι»

Γ= «επιλέχθηκε το δίκαιο ζάρι»

Αφού διαδοχικές ρίψεις είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους σημαίνει ότι $\Pr\{B\} = \Pr\{A\} = b$. Προσοχή ότι τα B και A δεν είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους αφού αν ξέρουμε ότι ισχύει το A τότε είναι πιο πιθανό να ισχύει το B (μεγαλύτερη πιθανότητα να επιλέχθηκε το άδικο ζάρι). Όμως αυτές είναι ανεξάρτητες όταν είναι υπό συνθήκη όταν μας δίνεται το ζάρι που επιλέχθηκε.

Άρα: $\Pr\{A \cap B|\Gamma\} = \Pr\{A|\Gamma\} \Pr\{B|\Gamma\}$

Και: $\Pr\{A \cap B|\bar{\Gamma}\} = \Pr\{A|\bar{\Gamma}\} \Pr\{B|\bar{\Gamma}\}$

Άρα:

$$f = \Pr\{A|B\} = \frac{\Pr\{A \cap B\}}{\Pr\{B\}} = \frac{\Pr\{A \cap B\}}{b} = \frac{\Pr\{A \cap B|\Gamma\} \Pr\{\Gamma\} + \Pr\{A \cap B|\bar{\Gamma}\} \Pr\{\bar{\Gamma}\}}{b} =$$

$$\frac{\Pr\{A|\Gamma\} \Pr\{B|\Gamma\} \Pr\{\Gamma\} + \Pr\{A|\bar{\Gamma}\} \Pr\{B|\bar{\Gamma}\} \Pr\{\bar{\Gamma}\}}{b} = \frac{\alpha^2 \frac{99}{100} + 1^2 \frac{1}{100}}{b} = \frac{99\alpha^2}{100} + \frac{1}{100b}$$

6(A) – 4(B)

1. Χρησιμοποιούμε εγκλεισμό-αποκλεισμό. Υπάρχουν 7! κωδικοί που περιέχουν τη λέξη «αυγο», 6! που περιέχουν τη λέξη «περνω» και 5! που περιέχουν τη λέξη «σπερνα». Υπάρχουν 3! κωδικοί που περιέχουν ταυτόχρονα τη λέξη «αυγο» και «περνω», ενώ δεν υπάρχει κωδικός που να έχει ταυτόχρονα τις λέξεις «σπερνα» και «περνω». Επίσης, οι λέξεις «σπερνα» και «αυγο» μπορεί να υπάρχουν ταυτόχρονα αν εμπεριέχεται η λέξη «σπερναυγο» και το ω μπορεί να πάρει οποιαδήποτε θέση από τις 2! που υπάρχουν. Κανένας κωδικός δεν μπορεί να περιέχει και τις τρεις λέξεις. Άρα το πλήθος των λέξεων που περιέχουν τουλάχιστον μία από τις απαγορευμένες λέξεις είναι:

$$(7! + 6! + 5!) - (3! + 0 + 2!) + 0 = 49 \cdot 5! - 8$$

Και άρα το συνολικό πλήθος έγκυρων κωδικών είναι:

$$10! - 49 \cdot 5! + 8 = 3.622.928$$

2. Σκεφτείτε όλες τις ομάδες από έναν ή περισσότερους ανθρώπους όπου ένας θα χαρακτηρίζεται ως αρχηγός από ένα σύνολο n ανθρώπων. Για κάθε ομάδα μεγέθους k θα έχουμε $k\binom{n}{k}$ τρόπους να το κάνουμε αυτό και παίρνοντας το άθροισμα πάνω στο k βρίσκουμε το συνολικό πλήθος τέτοιων ομάδων με τουλάχιστον έναν άνθρωπο. Από την άλλη, υπάρχουν n τρόποι να επιλεχθεί ο αρχηγός απευθείας και 2^{n-1} τρόποι να επιλεγεί η υπόλοιπη ομάδα (μέγεθος δυναμοσυνόλου συνόλου με n-1 στοιχεία). Άρα έχουμε συνολικά $n2^{n-1}$ τρόπους να συμβεί αυτό. **(ίδιο και για Β)**

3. a. Έστω 9 άσοι και 80 μηδενικά. Οι 9 άσοι χωρίζουν τα 80 μηδενικά σε 10 ομάδες όπου κάθε ομάδα αντιστοιχεί στο πλήθος των εμφανίσεων του αντίστοιχου ψηφίου.

b. Το πλήθος των ακολουθιών είναι $\binom{99}{9}$. **(Για το (Β) $\boldsymbol{\binom{89}{9}}$)**

3(A) – 5(B) (για το Β αντί για οκτώ θα έχουμε επτά)

Η συγκεκριμένη σχέση είναι:
α)ανακλαστική: αφού sRs που ισχύει προφανώς αφού η s έχει τους ίδιους οκτώ πρώτους χαρακτήρες με τον εαυτό της.
β)συμμετρική: έστω $s, t \in L$ και ισχύει sRt. Τότε το s έχει τους οκτώ πρώτους χαρακτήρες ίδιους με το t, το οποίο σημαίνει ότι και το t έχει τους οκτώ πρώτους χαρακτήρες ίσους με το s και άρα και άρα tRs και η R είναι συμμετρική.
γ)μεταβατική: Έστω $s, t, u \in L$ και sRt και tRu. Από τον ορισμό της σχέσης R το s έχει τους οκτώ πρώτους χαρακτήρες ίδιους με το t, και το t έχει τους οκτώ πρώτους χαρακτήρες ίδιους με το u. Άρα και το s έχει τους οκτώ πρώτους χαρακτήρες ίδιους με το u, οπότε sRu.
Άρα η R είναι σχέση ισοδυναμίας.

4(A) – 6(B)

α) $P_{k-1} = \frac{1}{2}P_{k-2} + \frac{1}{2}P_k$ από όπου έχουμε:

$$2P_{k-1} = P_{k-2} + P_k \Rightarrow P_k = 2P_{k-1} - P_{k-2}$$

για $2 \leq k \leq M$. Επίσης έχουν ότι $P_0 = 1$ και $P_M = 0$.

β) Θα το κάνουμε με τη χαρακτηριστική εξίσωση:

$$t^2 - 2t + 1 = 0$$

και άρα έχει μία διπλή ρίζα την $t = 1$.

Άρα οι λύσεις θα έχουν την μορφή

$$P_k = \alpha(1)^n + bn(1)^n \Rightarrow P_k = \alpha + bn$$

Από τις συνθήκες έχουμε:

$$P_0 = \alpha + b0 = 1 \Rightarrow \alpha = 1$$

$$P_M = 1 + bM = 0 \Rightarrow b = -\frac{1}{M}$$

Άρα:

$$P_k = 1 - \frac{1}{M}k \Rightarrow P_k = \frac{M-k}{M}$$

για $2 \leq k \leq M$.