ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ «ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ» - 16/6/2014

Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες και 30 λεπτά

1. (2 μονάδες)
Α) (1) Η πιθανότητα να βρέξει απόψε είναι 0,2. Η πιθανότητα να βρέξει απόψε και να μείνω σπίτι είναι 0,1. Η πιθανότητα να βρέξει απόψε ή να μείνω σπίτι (ή και τα δύο) είναι 0,4. Ποια είναι η πιθανότητα να μείνω σπίτι; Η απόφασή μου να μείνω σπίτι εξαρτάται από το αν βρέχει έξω; Η πιθανότητα να βρέξει εξαρτάται από το αν θα μείνω σπίτι; (με αιτιολόγηση)
Β) (1) Είναι γνωστό ότι όλες οι σαρκοβόρες πεταλούδες έχουν κόκκινα φτερά καθώς και ότι το 10% από όλες τις πεταλούδες είναι σαρκοβόρες. Επίσης, το 10% από τις μη-σαρκοβόρες πεταλούδες έχουν επίσης κόκκινα φτερά. Έστω ότι βρίσκουμε μία πεταλούδα με κόκκινα φτερά. Ποια είναι η πιθανότητα να είναι αυτή σαρκοβόρα;

2. (1,5 μονάδες)
Α) (0,8) Να δείξετε αν η $\forall x\, Αγαπώ(x) \vee \forall x\, Μισώ(x)$ είναι λογικά ισοδύναμη με την $\forall x\big(Αγαπώ(x) \vee Μισώ(x)\big)$.
Β) (0,7) Να δείξετε αν ο τύπος $\big(p \Rightarrow (q \vee r)\big) \Leftrightarrow \big((p \wedge \neg q) \Rightarrow r\big)$ είναι ταυτολογία, αντίφαση ή τίποτα από τα δύο.

3. (1.5 μονάδες)
Έστω η σχέση $R = \{(n, n^2) : n \in Z\}$ στους ακέραιους αριθμούς. Αποδείξτε αν αυτή η σχέση είναι ή δεν είναι: α) ανακλαστική, β) μη-ανακλαστική, γ) συμμετρική, δ) αντισυμμετρική και ε) μεταβατική. Είναι σχέση ισοδυναμίας;

4. (2 μονάδες)
Μία χώρα ξεκινά το 2000 με χρέος 0 ευρώ αλλά λόγω κακής οικονομικής διαχείρισης – και όχι μόνο – το χρέος κάθε χρόνο τριπλασιάζεται με επιπλέον απόλυτη αύξηση 20 ευρώ. Αυτό σημαίνει για παράδειγμα ότι το 2001 το χρέος θα είναι 20 ευρώ ενώ το 2002 θα είναι 80 ευρώ.

1. Να κατασκευαστεί αναδρομική σχέση με το χρέος της χώρας το <u>έτος</u> *n*.
2. Να λυθεί αυτή η αναδρομική σχέση και να υπολογισθεί <u>με βάση τη λύση που βρήκατε</u> το έτος στο οποίο το χρέος ξεπερνά για πρώτη φορά τα $10(3^{40} - 1)$ ευρώ.

5. (1,5 μονάδες)
Να υπολογιστεί ο κλειστός τύπος του αθροίσματος $S_n = \sum_{i=0}^{n} i2^{-i}$.

6. (2 μονάδες)
1. (0,6) Να δείξετε ότι για οποιεσδήποτε 5 κορυφές ενός κύβου, η γραμμή διαμέσου δύο εξ αυτών τέμνει το κέντρο του κύβου.
2. (0,6) Πόσοι τρόποι υπάρχουν να επιλέξουμε 10 αναψυκτικά από τρεις τύπους αναψυκτικών: σόδα, πορτοκαλάδα και λεμονάδα, όπου τουλάχιστον 5 θα πρέπει να είναι λεμονάδες;
3. (0,8) Έχουμε ένα σάκο με συνολικά *m* σφαίρες, όπου *m* άρτιος. Από αυτές, οι *m*/2 είναι ίδιες ενώ όλες οι υπόλοιπες είναι ανά δύο διαφορετικές μεταξύ τους. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε *m*/2 σφαίρες από το σάκο χωρίς επανατοποθέτηση και χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά.

7. (1,5 μονάδες)
Να αποδείξετε ότι για όλους τους θετικούς ακέραιους *a*, *b* ισχύει $a^2 - b^2 \neq 1$.

Καλή Επιτυχία!!!

Λύσεις

(Οι λύσεις είναι ενδεικτικές)

1.

A) Έστω A το γεγονός ότι βρέχει απόψε. Έστω B το γεγονός ότι μένω σπίτι. Τότε: P(A)=0,2. P(A∩B)=0,1 και P(A∪B)=0,4. Έχουμε:

$$P(A) + P(B) = P(A\cap B) + P(A\cup B)$$

από όπου προκύπτει ότι P(B)=0,3. Επίσης, P(A)P(B)=0,06 που δεν είναι ίσο με P(A∩B)=0,1 και άρα τα A και B δεν είναι ανεξάρτητα. Επομένως η απάντηση στις δύο ερωτήσεις είναι ΝΑΙ.

(Προφανώς, ο καιρός δεν επηρεάζεται από την απόφασή μας να μείνουμε στο σπίτι ή όχι, αλλά η γνώση για την απόφασή μου μπορεί να δώσει μία τέτοια πληροφορία.)

B) Έστω A το γεγονός ότι μία πεταλούδα είναι σαρκοβόρα (P(A)=0,1). Έστω B το γεγονός ότι μία πεταλούδα έχει κόκκινα φτερά. Θέλουμε να βρούμε την πιθανότητα P(A|B). Από τον κανόνα του Bayes αυτή είναι ίση με:

$$P(B|A)P(A)/P(B)$$

Ξέρουμε όμως ότι P(B|A)=1 ενώ P(B)=P(B|A)P(A)+P(B|A΄)P(A΄)=1*0,1+0,1*0,9=0,19.

Άρα: P(A|B)=10/19.

2.

A) Δεν είναι ισοδύναμοι. Έχει γίνει στο μάθημα.

B) Μπορεί να γίνει και με πίνακα αληθείας.

$$\big(p \Rightarrow (q \vee r)\big) \Leftrightarrow \big((p \wedge \neg q) \Rightarrow r\big) \equiv$$
$$(\neg p \vee q \vee r) \Leftrightarrow (\neg(p \wedge \neg q) \vee r) \equiv$$
$$(\neg p \vee q \vee r) \Leftrightarrow (\neg p \vee q \vee r)$$

Έστω α μία λογική μεταβλητή:

$$\alpha \Leftrightarrow \alpha \equiv$$
$$(\neg \alpha \vee \alpha) \wedge (\alpha \vee \neg \alpha) \equiv$$
$$T \wedge T \equiv T$$

Άρα η παραπάνω πρόταση είναι ταυτολογία.

3. Η R δεν είναι ανακλαστική αφού το (3,3) $\notin$ R.

Η R δεν είναι μη-ανακλαστική αφού το (1,1) $\in$ R.

Η R δεν είναι συμμετρική αφού το (2,4) $\in$ R ενώ το (4,2) $\notin$ R.

Η R είναι αντισυμμετρική αφού εκτός από n = 0 και n = 1, ισχύει $n < n^2$ ενώ για αυτές τις τιμές τα αντίστοιχα ζεύγη ανήκουν στην R.

Η R δεν είναι μεταβατική αφού το $(2,4) \in R$ και $(4,16) \in R$ ενώ το $(2,16) \notin R$.

Προφανώς η R δεν είναι σχέση ισοδυναμίας αφού δεν είναι ανακλαστική.

4.

Η αναδρομική που περιγράφει το πρόβλημα είναι:

$$T(n) = 3T(n-1) + 20, T(0) = 0$$

Προσοχή, ότι έχω θεωρήσει ότι το 0 αντιστοιχεί στο έτος 2000 για να κάνω πιο εύκολα τους υπολογισμούς μου. Στο τέλος θα πρέπει να μετατοπίσω όλη τη λύση στο έτος 2000.

Με τη μέθοδο της επανάληψης:

$$T(n) = 3T(n-1) + 20$$
$$3T(n-1) = 3^2T(n-2) + 3 \cdot 20$$
$$3^2T(n-2) = 3^3T(n-2) + 3^2 \cdot 20$$
$$3^3T(n-2) = 3^4T(n-2) + 3^3 \cdot 20$$
$$\vdots$$
$$3^{n-1}T(1) = 3^nT(0) + 3^{n-1} \cdot 20$$

Αθροίζοντας κατά μέλη και αναιρώντας τους όρους έχουμε:

$$T(n) = 3^nT(0) + (3^{n-1} + 3^{n-2} + \cdots + 3^0) \cdot 20$$
$$T(n) = 3^n \cdot 0 + \frac{(3^n - 1)}{2} \cdot 20$$
$$T(n) = 10 \cdot 3^n - 10$$

Όμως το *n* θα έπρεπε να αντιστοιχεί στο έτος και όχι απλά στον αύξων αριθμό του. Άρα, η σωστή αναδρομική σχέση είναι:

$$T(n) = 3T(n-1) + 20, T(2000) = 0$$

με λύση:

$$T(n) = 10 \cdot 3^{n-2000} - 10, n \geq 2000$$

Άρα θα πρέπει να λύσουμε την ανίσωση

$$10 \cdot 3^{n-2000} - 10 > 10(3^{40} - 1) \Rightarrow 3^{n-2000} > 3^{40} - 1 + 1 \Rightarrow n > 40 + 2000 \Rightarrow n > 2040.$$

5.

Χρησιμοποιούμε τον τύπο:

$$S_n + a_{n+1} = a_0 + \sum_{i=0}^{n} a_{i+1} \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)2^{-(n+1)} = 0 + \sum_{i=0}^{n} (i+1)2^{-(i+1)} \Rightarrow$$

Θέλουμε να εκφράσουμε το άθροισμα σαν συνάρτηση του S_n.

$$\sum_{i=0}^{n}(i+1)2^{-(i+1)} = \sum_{i=0}^{n} i2^{-(i+1)} + \sum_{i=0}^{n} 2^{-(i+1)} =$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} i2^{-i} + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} 2^{-i} = \frac{1}{2}S_n + \frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}S_n + 1 - 2^{-(n+1)}$$

Επομένως έχουμε:

$$S_n + (n+1)2^{-(n+1)} = \frac{1}{2}S_n + 1 - 2^{-(n+1)} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}S_n = 1 - 2^{-(n+1)} - (n+1)2^{-(n+1)} \Rightarrow$$

$$S_n = 2 - (n+2)2^{-n}$$

6.

1. Φτιάχνουμε τέσσερα ζεύγη από αντίθετες κορυφές (από τις 8 συνολικά) του κύβου ώστε οι γραμμές που περνούν από αυτές να διέρχονται από το κέντρο του κύβου. Από την αρχή του περιστερώνα, οποιοδήποτε σύνολο 5 κορυφών θα περιέχει ένα τέτοιο ζεύγος. Αποδείχτηκε.

2. Αυτό είναι ισοδύναμο με το να επιλέξουμε 5 αναψυκτικά από τρεις τύπους αφού τα υπόλοιπα 5 θα πρέπει να είναι λεμονάδες. Αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{7}{5}$ τρόπους.

3. Μπορούμε να διαλέξουμε *m*/2 από *m* αντικείμενα ως εξής:

- διαλέγουμε με 1 τρόπο *m*/2 ίδια αντικείμενα και με $\binom{\frac{m}{2}}{0}$ τρόπους 0 από τα διαφορετικά *m*/2 αντικείμενα.
- διαλέγουμε με 1 τρόπο *m*/2-1 ίδια αντικείμενα και με $\binom{\frac{m}{2}}{1}$ τρόπους 1 από τα διαφορετικά *m*/2 αντικείμενα.
- διαλέγουμε με 1 τρόπο *m*/2-2 ίδια αντικείμενα και με $\binom{\frac{m}{2}}{2}$ τρόπους 2 από τα διαφορετικά *m*/2 αντικείμενα.
- …
- διαλέγουμε με 1 τρόπο 0 ίδια αντικείμενα και με $\binom{\frac{m}{2}}{\frac{m}{2}}$ τρόπους *m*/2 από τα διαφορετικά *m*/2 αντικείμενα.

Άρα συνολικά θα έχουμε:

$\binom{\frac{m}{2}}{0} + \binom{\frac{m}{2}}{1} + \binom{\frac{m}{2}}{2} + \binom{\frac{m}{2}}{\frac{m}{2}} = \sum_{i=0}^{\frac{m}{2}}\binom{\frac{m}{2}}{i} = 2^{\frac{m}{2}}$ τρόπους

7.

Θα το δείξουμε με άτοπο. Έστω ότι a^2-b^2=1, και άρα (a+b)(a-b)=1. Αφού τα a και b είναι ακέραιοι το ίδιο ισχύει και για τους a+b και a-b. Άρα, αφού (a+b)(a-b)=1, προκύπτει ότι a+b = a-b = 1. Άρα:

(a+b)+(a-b)=1+1, από όπου προκύπτει ότι 2a=2 και άρα a=1.

Άρα, το b=0, που είναι άτοπο μιας και το b θα έπρεπε να είναι θετικός ακέραιος.