# ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

*ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ «ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ» - 10/9/2014*

Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες και 40 λεπτά

**1. (2 μονάδες)**

**Α. (0.5)** Έστω ότι ο τομέας αναφοράς είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί και έστω η δήλωση $P(x, y) = "y^2 = x"$. Να αιτιολογήσετε σχετικά με το αν είναι αληθής ή ψευδής η εξής λογική πρόταση: $\forall x \exists y\, P(x, y)$.

**Β. (0.9)** Να δείξετε ότι η λογική πρόταση $\neg\Big(\big(\forall x\big(Q(x) \wedge P(x)\big)\big) \wedge \big(\exists y\big(\neg P(y)\big)\big)\Big)$ είναι ταυτολογία.

**Γ. (0.6)** Να δείξετε ότι η λογική πρόταση $\big((p \to q) \to (p \wedge q)\big) \to p$ είναι ταυτολογία.

**2. (3 μονάδες)**

**Α. (0.5)** Έστω όλες οι μεταθέσεις των γραμμάτων ΑΒΓΔΕΖΗ.

1. Πόσες μεταθέσεις υπάρχουν που περιέχουν τις λέξεις ΒΑ και ΗΖΕ (τα γράμματα εμφανίζονται συνεχόμενα);
2. Σε πόσες μεταθέσεις το γράμμα Α προηγείται του γράμματος Β (το Α δεν χρειάζεται να είναι απαραίτητα ακριβώς στην προηγούμενη θέση από το Β);

**Β. (0.5)** Η Ερμιόνη θέλει να στείλει ένα σύνολο από 12 διαφορετικά σύμβολα και 40 κενά διαμέσου ενός καναλιού επικοινωνίας. Τα κενά θα πρέπει να σταλούν με τέτοιο τρόπο ώστε να υπάρχουν τουλάχιστον 3 κενά μεταξύ διαδοχικών συμβόλων, ενώ δεν επιτρέπονται κενά πριν το πρώτο σύμβολο ή μετά το τελευταίο. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να στείλει το μήνυμα;

**Γ. (0.5)** Ο ιδιοκτήτης μίας πιτσαρίας φτιάχνει πίτσες συνδυάζοντας πάντα 4 διαφορετικά συστατικά. Πόσα διαφορετικά συνολικά συστατικά θα πρέπει να έχει τουλάχιστον αν ήθελε να προσφέρει 30 διαφορετικές πίτσες στο μενού;

**Δ. (0.5)** Ποιό είναι το ελάχιστο πλήθος ανθρώπων σε ένα στάδιο, ο καθένας από τους οποίους έχει γεννηθεί σε μία από τις 100 πόλεις μίας χώρας, για να υπάρχουν τουλάχιστον 50 που έχουν γεννηθεί στην ίδια πόλη?

**Ε. (1)** 75 παιδιά πήγαν σε ένα πάρκο διασκέδασης όπου μπορούν να συμμετέχουν σε τρία παιχνίδια. Είναι γνωστό ότι 20 από αυτά συμμετείχαν και στα τρία παιχνίδια και ότι 55 από αυτά συμμετείχαν τουλάχιστον σε δύο από τα τρία παιχνίδια. Η συμμετοχή σε κάθε παιχνίδι κοστίζει 1 ευρώ και η συνολική είσπραξη ήταν 140 ευρώ. Να προσδιορίσετε τον αριθμό των παιδιών που δεν συμμετείχαν σε κανένα παιχνίδι.

**3. (2 μονάδες)**

1. (0.8) Ο παππούς του μικρού Νικόλα έχει στην τσέπη του 8 καραμέλες (4 κόκκινες και 4 άσπρες) και 12 τσίχλες (2 κόκκινες και 10 άσπρες). Τραβάει τυχαία από την τσέπη του (ισοπίθανα) για να δώσει ένα δωράκι στον Νικόλα ο οποίος βλέπει από μακριά ότι ο παππούς του τράβηξε κάτι κόκκινο. Ποια είναι η πιθανότητα να είναι καραμέλα;

2. (0.4) Ένας καθηγητής επιλέγει τυχαία (ισοπίθανα) 3 βοηθούς μαθήματος από τους συνολικά 10 που έχουν κάνει αίτηση (6 αγόρια και 4 κορίτσια). Ποια είναι η πιθανότητα και οι τρεις που επέλεξε να είναι αγόρια;

3. (0.8) Ο Κωστίκας και ο Γιωρίκας ρίχνουν ο καθένας τους ένα νόμισμα 5 φορές. Ποια είναι η πιθανότητα τουλάχιστον ένας από αυτούς να πάρει 5 ίδια αποτελέσματα.

**4. (1,5 μονάδες)**
Να υπολογίσετε τον κλειστό τύπο του ακόλουθου αθροίσματος (προτείνεται – χωρίς να είναι δεσμευτικό – να χρησιμοποιήσετε τη μέθοδο εξίσωσης αθροίσματος):

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}$$

**5. (1 μονάδα)**
Έστω *Λ* το σύνολο φιδιών που ζουν σε 10 διαφορετικά περιφραγμένα πάρκα. Μία διμελής σχέση $R$ ορίζεται στο *Λ* ως εξής: Για κάθε $p,q \in Λ$, $pRq$ σημαίνει ότι το $p$ ζει στο ίδιο πάρκο με το $q$. Να δείξετε αν η $R$ είναι σχέση ισοδυναμίας ή όχι.

**6. (1,5 μονάδες)**
Να αποδείξετε τα εξής θεωρώντας ως δεδομένη την εξής ιδιότητα για κάθε ακέραιο $a, b, n$:

$$(a + b) \bmod n = \big((a \bmod n) + (b \bmod n)\big) \bmod n$$

1. **(0.6)** Να δείξετε ότι για κάθε ακέραιο $\alpha$ ισχύει ότι $a^2 \bmod 4$ θα είναι 0 ή 1. *(Υπόδειξη: ελέγξτε τι γίνεται όταν ο $m$ είναι περιττός και τι γίνεται όταν είναι άρτιος)*
2. **(0.9)** Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα (1) να αποδείξετε ότι αν ο $m$ είναι ένας θετικός ακέραιος έτσι ώστε $m = 4k + 3$, για κάποιο μη αρνητικό ακέραιο $k$, τότε ο $m$ δεν είναι άθροισμα των τετραγώνων δύο ακεραίων.

**7. (2 μονάδες)**
Μία διαγώνιος σε ένα κυρτό πολύγωνο είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δύο μη γειτονικές κορυφές. Για παράδειγμα, ένα τρίγωνο δεν έχει καμία διαγώνιο αφού όλες οι κορυφές συνδέονται μεταξύ τους. Ένα ορθογώνιο έχει δύο διαγώνιους. α) Εκφράστε με μία αναδρομική σχέση το πλήθος των διαγώνιων σε ένα κυρτό πολύγωνο με $n$ πλευρές. β) Βρείτε τον κλειστό τύπο της συγκεκριμένης αναδρομικής σχέσης.

***Καλή Επιτυχία!!!***

# Λύσεις

## (Οι λύσεις είναι ενδεικτικές)

**1.**

Α. Είναι ψευδής. Για παράδειγμα, αν $x = -1$ τότε δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός $y$ έτσι ώστε $y^2 = -1$.

Β. Έχουμε τα εξής:

$$\neg\Big(\big(\forall x\big(Q(x) \wedge P(x)\big)\big) \wedge \big(\exists y\big(\neg P(y)\big)\big)\Big) \equiv \neg\big(\forall x\big(Q(x) \wedge P(x)\big)\big) \vee \neg\big(\exists y\big(\neg P(y)\big)\big)$$

$$\equiv \big(\exists x\big(\neg Q(x) \vee \neg P(x)\big)\big) \vee \big(\forall y\big(P(y)\big)\big)$$

Ας δούμε λίγο την εξωτερική διάζευξη. Το δεύτερο μέρος είναι αληθές αν το $P(y)$ είναι αληθές σε όλο τον τομέα αναφοράς. Αν ισχύει αυτό τότε η πρόταση είναι αληθής. Αν δεν ισχύει, τότε σημαίνει ότι υπάρχει κάποιο $y$ έτσι ώστε να είναι αληθές το $\neg P(y)$. Για να το γράψουμε λίγο διαφορετικά, θα σημαίνει ότι η πρόταση $\exists x\big(\neg P(x)\big)$ είναι αληθής. Αυτό όμως ακριβώς υπάρχει στην πρώτη παρένθεση – σε διάζευξη βέβαια με το $\neg Q(x)$ που είναι όμως άσχετο. Επομένως, η λογική πρόταση είναι ταυτολογία.

**Γ.** Με πίνακα αληθείας.

| p | q | $p \Rightarrow q$ | $p \wedge q$ | $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge q)$ | $\big((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge q)\big) \Rightarrow p$ |
|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T | T |
| T | F | F | F | T | T |
| F | T | T | F | F | T |
| F | F | T | F | F | T |

Άρα είναι ταυτολογία.

**2.** Α. 1. Στην ουσία θα πάρουμε τις μεταθέσεις «τεσσάρων γραμμάτων»: ΒΑ, ΗΖΕ, Γ και Δ. Επομένως έχουμε 4! = 24 μεταθέσεις.

2. Το Α θα προηγείται του Β στις μισές μεταθέσεις από τις συνολικά 7!. Άρα, $\frac{1}{2}7! = 2520$

Β. Θα πρέπει μεταξύ των 12 διαφορετικών συμβόλων να υπάρχουν τρία κενά. Αυτό σημαίνει ότι στα 11 διαστήματα που αυτά ορίζουν χρησιμοποιούμε 3 κενά σε καθένα και άρα συνολικά 3*11=33 κενά. Επομένως, 7 κενά μπορούν να τοποθετηθούν με οποιοδήποτε τρόπο σε αυτά τα 11 διαστήματα. Το πλήθος των τρόπων να γίνει αυτό είναι $\binom{11+7-1}{7} = \binom{17}{7}$. Επίσης, για κάθε έναν από αυτούς τους τρόπους τοποθέτησης των 7 κενών έχουμε 12! τρόπους να τοποθετήσουμε τα διαφορετικά σύμβολα. Από τον κανόνα του γινομένου έχουμε ότι το τελικό αποτέλεσμα είναι: $12!\binom{17}{7}$.

Γ. Χρησιμοποιώντας $x$ διαφορετικά συνολικά συστατικά θα έχουμε $\binom{x}{4}$ πίτσες συνολικά. Θα πρέπει να βρούμε τον μικρότερο ακέραιο $x$ ώστε $\binom{x}{4} \geq 30$. Για x=6, έχουμε 15 διαφορετικές πίτσες ενώ για x=7 έχουμε 35 διαφορετικές. Άρα, θα πρέπει να έχει τουλάχιστον 7 διαφορετικά συνολικά συστατικά.

Δ. Χρησιμοποιείται η γενικευμένη αρχή του περιστερώνα. Οι πόλεις είναι οι φωλιές και οι άνθρωποι τα περιστέρια. Αν θέλουμε να έχουμε τουλάχιστον 50 περιστέρια σε μία φωλιά, τότε χρειαζόμαστε να έχουμε Ν ανθρώπους έτσι ώστε $\left\lceil \frac{N}{100} \right\rceil \geq 50$. Αυτό θα ισχύει για Ν = 100*49 + 1 =4901

Ε. Έστω $\Pi_i,\ i = 1,2,3$ το σύνολο των παιδιών που συμμετείχαν στο παιχνίδι $i$. Το ζητούμενο είναι ίσο με $75 - |\Pi_1 \cup \Pi_2 \cup \Pi_3|$. Θα γίνει ο υπολογισμός με βάση την αρχή του εγκλεισμού-αποκλεισμού. Από τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε:

$$|\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3| = 20$$

$$|\Pi_1| + |\Pi_2| + |\Pi_3| = 140$$

*# παιδιών σε ≥ 2 παιχνίδια* = $|\Pi_1 \cap \Pi_2| + |\Pi_1 \cap \Pi_3| + |\Pi_2 \cap \Pi_3| - 2|\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3| = 55$

και άρα $|\Pi_1 \cap \Pi_2| + |\Pi_1 \cap \Pi_3| + |\Pi_2 \cap \Pi_3| = 95$

Από εγκλεισμό-αποκλεισμό έχουμε:

$$|\Pi_1 \cup \Pi_2 \cup \Pi_3| = 140 - 95 + 20 = 65$$

Επομένως, 75-65=10 παιδιά δεν συμμετείχαν σε κανένα παιχνίδι.

**3.** 1. Έστω Κ και ΚΚ τα συμβάντα ότι είναι καραμέλα και κόκκινη αντίστοιχα. Θέλουμε να υπολογίσουμε την υπό συνθήκη πιθανότητα $\Pr[K|KK]$. Καταρχάς: $\Pr[K] = \frac{8}{20}$ ενώ $\Pr[KK] = \frac{6}{20}$. Επίσης $\Pr[KK|K] = \frac{4}{8}$. Επομένως:

$$\Pr[K|KK] = \frac{\Pr[K]\Pr[KK|K]}{\Pr[KK]} = \frac{\frac{8}{20}\frac{4}{8}}{\frac{6}{20}} = \frac{2}{3}$$

2. Υπάρχουν $\binom{10}{3}$ τρόποι να επιλέξουμε τρεις βοηθούς ενώ υπάρχουν $\binom{6}{3}$ τρόποι να επιλεγούν τρία αγόρια από 6 συνολικά. Άρα η πιθανότητα ότι κανένα κορίτσι δεν επιλέχθηκε είναι $\frac{20}{120} = \frac{1}{6}$.

3. Δειγματοχώρος: $2^5$=32

Γεγονότα: *Γ*={ο Γιωρίκας έφερε ίδια αποτελέσματα}, ομοίως *Κ*.

Πιθανότητες Στοιχειωδών Γεγονότων: Ισοπίθανα 1/32

Πιθανότητες Γεγονότων:

$$\Pr(\Gamma) = 2\frac{1}{32} = \frac{1}{16}, \Pr(K) = \frac{1}{16}, \Pr(\Gamma \cap K) = \frac{1}{256}$$

Άρα: $\Pr(\Gamma \cup K) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} - \frac{1}{256} = \frac{31}{256}$

**4.**

$$S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}(-1)^{n+1-k} = (-1)^{n+1-0} + \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{n+1-k} = (-1)^{n+1} + \sum_{k+1=1}^{n+1}(-1)^{n+1-(k+1)}$$

Στην τελευταία ισότητα κάναμε αλλαγή μεταβλητής. Άρα:

$$S_{n+1} = (-1)^{n+1} + \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n-k} = (-1)^{n+1} + S_n$$

Επίσης έχουμε:

$$S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n+1-k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+1-k} + (-1)^{n+1-(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+1-k} + 1 = -\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} + 1 = -S_n + 1$$

Επομένως έχουμε:

$$(-1)^{n+1} + S_n = -S_n + 1 \Rightarrow S_n = \frac{1}{2}(1 - (-1)^{n+1})$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1}{2}(1 + (-1)^n)$$

**5.**

Η $R$ είναι ανακλαστική (ένα φίδι και ο εαυτός του ανήκει στο ίδιο πάρκο) καθώς και συμμετρική (αν το φίδι $p$ ανήκει στο ίδιο πάρκο με το $q$ τότε ισχύει και το αντίστροφο). Η σχέση είναι μεταβατική αφού αν για $p,q,r \in \Lambda$, ισχύει ότι $pRq$ και $qRr$ τότε και $pRr$ αφού και τα τρία φίδια θα ανήκουν στο ίδιο πάρκο. Άρα είναι σχέση ισοδυναμίας με 10 διαφορετικές κλάσεις ισοδυναμίας που αντιστοιχούν στα διαφορετικά πάρκα.

**6.**

1. Αν ο $a$ είναι άρτιος τότε $a = 2k$ για κάποιον ακέραιο $k$. Επομένως, $a^2 \bmod 4 = 4k^2 \bmod 4 = 0$.
   Αν ο $a$ είναι περιττός τότε $a = 2k + 1$ για κάποιον ακέραιο $k$. Επομένως, $a^2 \bmod 4 = (4k^2 + 4k + 1) \bmod 4 = 1$. Αποδείχθηκε.

2. Θα το αποδείξουμε με εις άτοπο. Έστω ότι $m = a^2 + b^2$ για ακέραιους $a$ και $b$. Τότε:
   $$m \bmod 4 = (a^2 + b^2) \bmod 4 = \big((a^2 \bmod 4) + (b^2 \bmod 4)\big) \bmod 4$$

   Με δεδομένο το (1) έχουμε τέσσερις περιπτώσεις (οι δύο είναι συμμετρικές):

   $$(0 + 0) \bmod 4 = 0$$

   $$(0 + 1) \bmod 4 = 1$$

   $$(1 + 0) \bmod 4 = 1$$

   $$(1 + 1) \bmod 4 = 2$$

   Επομένως η ποσότητα $m \bmod 4$ μπορεί να πάρεις τις τιμές 0, 1 ή 2. Όμως:

   $$m \bmod 4 = (4k + 3) \bmod 4 = \big((4k \bmod 4) + (3 \bmod 4)\big) \bmod 4 = (0 + 3) \bmod 4 = 3.$$

   Αυτό είναι αδύνατο όμως αφού το $m \bmod 4$ μπορεί να παίρνει τις τιμές 0, 1 και 2 μόνο. Άρα το (2) ισχύει.

**7.** α) Ας υποθέσουμε ότι για $n$-1 πλευρές έχουμε $a_{n-1}$ συνολικά διαγώνιες. Τότε, όταν προσθέσουμε μία πλευρά θα έχουμε $a_n$ συνολικά διαγώνιες. Οι νέες διαγώνιες που δημιουργούνται είναι: 1 διαγώνιος λόγω των πλευρών που απομακρύνθηκαν και ενδιάμεσα μπήκε η νέα πλευρά και $n$-3 διαγώνιες που φεύγουν από την νέα κορυφή προς όλες τις υπόλοιπες χωρίς να υπολογίζουμε τις γειτονικές. Άρα:

$$a_n = a_{n-1} + n - 2, a_3 = 0$$

β) Για την ομογενή μαντεύουμε τη λύση $a_n = c1^n$, για κάποια σταθερά $c$. Επιλέγουμε μη ομογενής λύση την $a_n = dn + b$. Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$dn + b = d(n-1) + b + n - 2 \Rightarrow dn = dn - d + n - 2 \Rightarrow d = n - 2$$

Αφού το $d$ δεν είναι σταθερά, η επιλογή που κάναμε δεν ήταν καλή.

Επιλέγουμε μη ομογενής λύση την $a_n = dn^2 + bn + c$. Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$dn^2 + bn + c = d(n-1)^2 + b(n-1) + c + n - 2 \Rightarrow (1 - 2d)n + (d - b - 2) = 0$$

Από εδώ έχουμε ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους από όπου προκύπτει ότι $d = \frac{1}{2}$ και $b = -\frac{3}{2}$.

Συνδυάζοντας τις δύο λύσεις προκύπτει ότι:

$$a_n = c + \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n$$

Αφού $a_3 = 0$, προκύπτει με αντικατάσταση ότι $c = 0$.

Άρα:

$$a_n = \frac{n(n-3)}{2}$$