

Ασκήσεις σε Αναγωγές και Κλάσεις Πολυπλοκότητας

Καταληκτική Ημερομηνία Παράδοσης: 5/11/2015

Προσθετικός βαθμός: 1 (+ 0.5 το ερώτημα 1.2)

(με email στο tsichlas@delab.csd.auth.gr)

Άσκηση 1

Εστω τα δύο προβλήματα ET (Έλεγχος Ταξινόμησης) και TSP (το πρόβλημα του περιοδεύοντος πωλητή – Travelling Salesman Problem).

Το ET ορίζεται ως εξής: Μας δίνεται ένας μονοδιάστατος πίνακας n στοιχείων και το πρόβλημα είναι να αποφασίσουμε αν ο πίνακας είναι ταξινομημένος ή όχι. Προφανώς το πρόβλημα ανήκει στην κλάση P.

Το TSP ορίζεται ως εξής: Μας δίνεται ένα πλήρες γράφημα $G = (V, E)$, μία συνάρτηση $f: E \rightarrow \mathbb{R}^+$, που ορίζει τις αποστάσεις μεταξύ δύο κόμβων (πόλεων στο γράφημα) και ένας θετικός πραγματικός αριθμός k . Η ερώτηση είναι αν υπάρχει κύκλος (ενδεχομένως όχι απλός, δηλαδή με επαναλήψεις κόμβων) ώστε ο πωλητής να περάσει από όλες τις πόλεις (κόμβους) και η συνολική απόσταση που θα διανύσει να είναι $\leq k$.

Σας ζητούνται τα εξής:

1. Να ανάγετε το πρόβλημα ET στο πρόβλημα TSP. (0.2)
2. Να ανάγετε το πρόβλημα TSP στο πρόβλημα ET. (0.5)

Άσκηση 2

Να κάνετε αναλυτικά την αναγωγή από το πρόβλημα HAMPATH στο πρόβλημα GA όπως αυτά ορίζονται στις [διαφάνειες](#) 101-117 που έχουν ανακοινωθεί στις 8/10 στον ιστότοπο του μαθήματος.

Άσκηση 3

Η κλάση coNP είναι η κλάση των συμπληρωματικών των προβλημάτων της κλάσης NP. Με άλλα λόγια, είναι η κλάση των προβλημάτων για τα οποία υπάρχει σύντομο πιστοποιητικό για το ΟΧΙ (σε αντιστοιχία με την κλάση NP όπου υπάρχει σύντομο πιστοποιητικό για το. Για παράδειγμα, για το πρόβλημα SAT, το συμπληρωματικό του είναι το UNSAT = $\{\Phi \mid \text{ο } \Phi \text{ είναι ένας λογικός τύπος που δεν είναι ικανοποιήσιμος}\}$. Αφού $\text{SAT} \in \text{NP}$, θα είναι $\text{UNSAT} \in \text{coNP}$. Τα coNP-πλήρη προβλήματα ορίζονται με αντίστοιχο τρόπο με αυτόν των NP-πλήρων προβλημάτων.

A) Δείξτε ότι εάν οι κλάσεις NP και coNP είναι διαφορετικές, τότε και οι κλάσεις P και NP είναι διαφορετικές.

B) Δείξτε ότι εάν ένα πρόβλημα X είναι NP-πλήρες, τότε το συμπληρωματικό του, X', είναι coNP - πλήρες.

Γ) Δείξτε ότι το πρόβλημα VSAT = $\{\Phi \mid \text{ο } \Phi \text{ είναι ένας λογικός τύπος που ικανοποιείται από κάθε ανάθεση τιμών στις μεταβλητές της}\}$ ανήκει στην κλάση coNP.

Άσκηση 4

Δίνεται η παρακάτω παραλλαγή του προβλήματος της Ικανοποιησιμότητας (SAT):

HSAT: Δοθέντος ενός λογικού τύπου Φ σε Κανονική Συζευκτική Μορφή, ορισμένη σε n μεταβλητές, υπάρχει ανάθεση τιμών που να ικανοποιεί τον Φ και η οποία να αποδίδει τιμή *αλήθεια* (*true*) σε ακριβώς $n/2$ μεταβλητές του Φ ;

A) Αποδείξτε ότι το πρόβλημα HSAT ανήκει στην κλάση NP.

B) Αποδείξτε ότι το HSAT είναι NP-δυσχερές με αναγωγή από το SAT.

Γ) Υποθέτοντας ότι το πρόβλημα HSAT ανήκει στην κλάση P, σχεδιάστε πολυωνυμικό αλγόριθμο για το πρόβλημα SAT.

Δ) Υποθέτοντας ότι το πρόβλημα SAT ανήκει στην κλάση P, υπάρχει πολυωνυμικός αλγόριθμος για το πρόβλημα HSAT ή όχι και γιατί;