ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ «ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΚΑΙ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ» - 3/2/2016

(Διάρκεια Εξέτασης 2 ½ ώρες)

Θέμα 1ο: (2,5 Μονάδες)

Μας δίνονται ξένα ανά δύο μεταξύ τους σύνολα X, Y, Z, W, όπου $|X| = |Y| = |Z| = |W|$, και ένα σύνολο $T \subseteq X \times Y \times Z \times W$ διατεταγμένων τετράδων. Ένα υποσύνολο $M \subseteq T$ είναι ένα 4-διάστατο ταίριασμα αν κάθε στοιχείο του συνόλου $X \cup Y \cup Z \cup W$ περιέχεται ***σε το πολύ μία*** τέτοια τετράδα του M. Στο πρόβλημα του μέγιστου 4-διάστατου ταιριάσματος ζητείται ένα 4-διάστατο ταίριασμα M μέγιστου μεγέθους (να περιέχει δηλαδή όσο το δυνατό περισσότερες τετράδες). Δώστε έναν ¼-προσεγγιστικό αλγόριθμο που βασίζεται στην απληστία, και που βρίσκει ένα τέτοιο ταίριασμα ενώ έχει πολυωνυμική πολυπλοκότητα (πρέπει να δείξετε ότι ο λόγος προσέγγισης είναι ¼ και επίσης να δείξετε ότι ο αλγόριθμός σας είναι πολυωνυμικής πολυπλοκότητας). Δείξτε ότι η προσέγγιση είναι αυστηρή.

Θέμα 2ο: (2,5 Μονάδες)

Μας δίνεται ένα κίβδηλο νόμισμα με πιθανότητα εμφάνισης ΓΡΑΜΜΑΤΩΝ (Γ) p και πιθανότητα εμφάνισης ΚΟΡΩΝΑΣ (Κ) 1-p. α) Πώς θα εξομοιώσετε ένα δίκαιο νόμισμα (Κ με πιθανότητα ½ και Γ με πιθανότητα ½) χρησιμοποιώντας μόνο το κίβδηλο νόμισμα (να δώσετε και απόδειξη ορθότητας); β) Πόσες επαναλήψεις πρέπει να γίνουν της διαδικασίας που δώσατε στο ερώτημα (α) κατά μέσο όρο, μέχρι να έχουμε επιτυχία στην εξομοίωση; γ) Πόσες επαναλήψεις πρέπει να γίνουν της διαδικασίας που δώσατε στο ερώτημα (α) ώστε με πιθανότητα τουλάχιστον δ να έχουμε επιτυχία στην εξομοίωση;

Θέμα 3ο: (1 Μονάδα)

Να αποδείξετε ότι αν NP≠co-NP τότε κανένα NP-πλήρες πρόβλημα δεν μπορεί να ανήκει στο co-NP και κανένα co-NP-πλήρες πρόβλημα δεν μπορεί να ανήκει στο NP.

Θέμα 4ο: (3 Μονάδες)

Ένας οδηγός ταξί που βρίσκεται στο αεροδρόμιο έχει στη διάθεσή του έναν χάρτη με το αντίτιμο για κάθε δρόμο μεταξύ διασταυρώσεων. Αυτό σημαίνει ότι το τελικό αντίτιμο για έναν πελάτη είναι το άθροισμα όλων των αντιτίμων για όλους τους δρόμους από τους οποίους θα διέλθει το ταξί. Ένας τουρίστας εισέρχεται στο ταξί και δίνει στον οδηγό τον τελικό του προορισμό. Μιας και ο πελάτης είναι τουρίστας, ο «πονηρός» οδηγός θα επιλέξει για διαδρομή στον τελικό προορισμό αυτή που μεγιστοποιεί το αντίτιμο που θα πληρώσει ο τουρίστας μιας και αυτός δεν μπορεί να το καταλάβει εκτός και αν το ταξί περάσει από το ίδιο σημείο δεύτερη φορά (διασταύρωση ή δρόμο). Το ερώτημα είναι ποιον δρόμο θα πρέπει να ακολουθήσει ο οδηγός ώστε να μεγιστοποιήσει το κέρδος του.

Α) Αναπαραστήστε το παραπάνω πρόβλημα ως πρόβλημα βελτιστοποίησης σε ένα γράφημα. Έπειτα δώστε το αντίστοιχο πρόβλημα απόφασης, ΠΤ (Πονηρός Ταξιτζής).

Β) Αποδείξτε ότι το πρόβλημα ΠΤ ανήκει στη κλάση NP.

Γ) Αποδείξτε ότι το πρόβλημα ΠΤ είναι NP-πλήρες ανάγοντας σε αυτό το πρόβλημα της εύρεσης κύκλου Hamilton σε κατευθυντικό γράφημα.

Θέμα 5ο: (2 Μονάδες)

Να αναφέρετε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι Σωστές (Σ) ή Λάθος (Λ) χωρίς αιτιολόγηση.

1. Το 2-SAT είναι NP-πλήρες

2. Αν το B είναι NP-πλήρες, $C \in NP$, και $B \leq_P C$, τότε και το C είναι NP-πλήρες.
3. Αν SAT∈P τότε και co-SAT∈P.
4. Η κλάση PSPACE μπορεί να είναι υποσύνολο της κλάσης NP.
5. Υπάρχει τυχαίος αλγόριθμος και δομή δεδομένων που σε $O(n)$ αναμενόμενο χρόνο συνολικά, καθορίζει αν ένας πίνακας n ακεραίων έχει επαναλαμβανόμενα στοιχεία, δηλαδή αν υπάρχουν δύο διαφορετικοί αριθμοί i και j έτσι ώστε $A[i] = A[j]$.
6. Για το πρόβλημα της εξισορρόπησης φορτίου, που είναι NP-πλήρες, υπάρχει 3/2-προσεγγιστικός αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου.
7. Αν ένα πρόβλημα είναι NP-πλήρες τότε αποκλείεται η ύπαρξη ενός αποδοτικού αλγόριθμου για συγκεκριμένες οικογένειες στιγμιοτύπων εισόδου.
8. Ο χώρος που απαιτεί το SAT για τη λύση του είναι εκθετικός αφού αυτό είναι NP-πλήρες.
9. ¨Ενας Monte-Carlo αλγόριθμος μπορεί πάντοτε να εξομοιωθεί από έναν Las Vegas αλγόριθμο.
10. Ένας PTAS αλγόριθμος παρέχει ένα tradeoff μεταξύ ποιότητας λύσης ως προς την προσέγγιση και χώρου.

Καλή Επιτυχία!!!!

Λύσεις

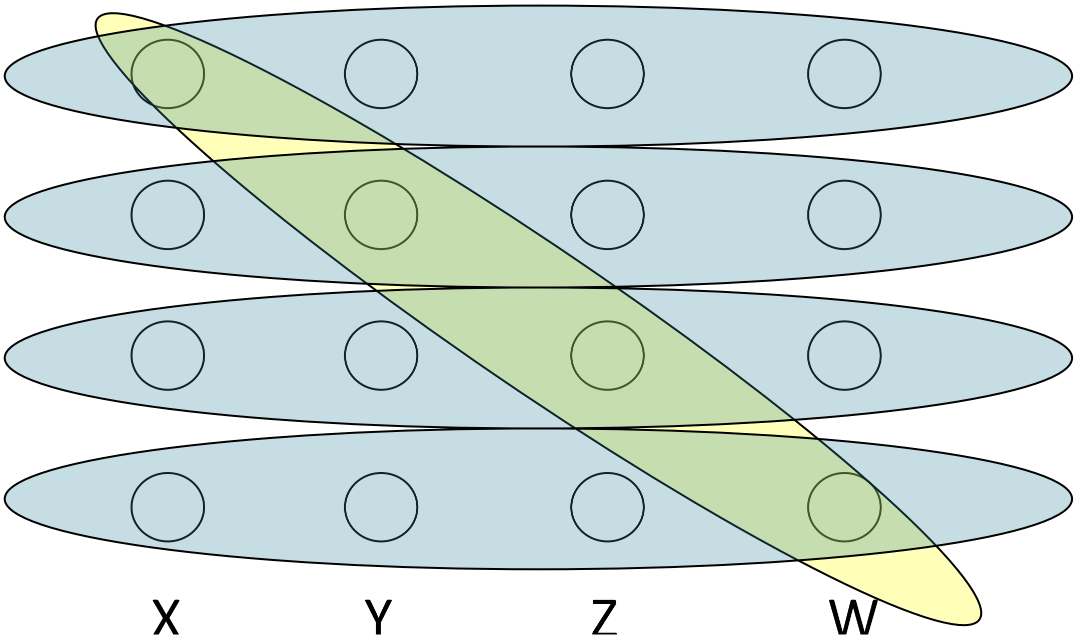
(Οι λύσεις είναι ενδεικτικές)

Θέμα 1:

Επεξεργαζόμαστε τις τετράδες του T σε μία αυθαίρετη σειρά και τις προσθέτουμε στο σύνολο M που θα βρούμε αν η τετράδα που επεξεργαζόμαστε δεν έχει κανένα κοινό στοιχείο με οποιαδήποτε τετράδα που εντός του M. Ο αλγόριθμος αυτός έχει τετραγωνική πολυπλοκότητα ($O(n^2)$, αν $|T|=n$) αφού θα πρέπει κάθε τετράδα που επεξεργάζεται να την ελέγχει με κάθε τετράδα που βρίσκεται ήδη στο M.

Έστω ότι M^* είναι το βέλτιστο 4-διάστατο ταίριασμα. Θα δείξουμε ότι $|M| \geq \frac{1}{4}|M^*|$. Κάθε τετράδα στο M^* θα πρέπει να έχει κοινό στοιχείο με τουλάχιστον μία τετράδα στο M, διαφορετικά ο άπληστος αλγόριθμος θα πρόσθετε αυτή την τετράδα στο M. Επίσης, κάθε τετράδα στο M μπορεί να έχει κοινό στοιχείο με το πολύ 4 τετράδες στο M^*, αφού και στο M^* όλα τα στοιχεία του $X \cup Y \cup Z \cup W$ εμφανίζονται το πολύ μία φορά. Άρα το M^* δεν μπορεί να έχει περισσότερες από $4|M|$ τετράδες. Από εδώ προκύπτει ο λόγος προσέγγισης ¼.

Ο λόγος προσέγγισης είναι αυστηρός αφού ο άπληστος θα μπορούσε να επιλέξει την κίτρινη τετράδα από τις συνολικά πέντε τετράδες του Τ στο παρακάτω παράδειγμα ενώ ο βέλτιστος θα επέλεγε τις 4 γαλάζιες με λόγο 1/4.



Θέμα 2:

(α) Θα ρίξουμε το νόμισμα δύο φορές συνεχόμενα. Σε περίπτωση που μας έρθει σαν αποτέλεσμα ΚΚ ή ΓΓ τότε επαναλαμβάνουμε το πείραμα. Αν έρθει ΚΓ τότε θεωρούμε ότι ήρθε ΚΟΡΩΝΑ στο δίκαιο νόμισμα ενώ αν έρθει ΓΚ τότε θεωρούμε ότι ήρθε ΓΡΑΜΜΑΤΑ στο δίκαιο νόμισμα. Η πιθανότητα για ΚΓ είναι $p(1-p)$ ενώ για ΓΚ είναι $p(1-p)$ που σημαίνει ότι είναι ίσες και άρα εξομοιώνουμε ένα δίκαιο νόμισμα.

(β) Έστω η τυχαία μεταβλητή Χ που περιγράφει το πλήθος των πειραμάτων μέχρι την $1^{η}$ φορά που έχουμε επιτυχία. Αυτή η τυχαία μεταβλητή ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή με πιθανότητα επιτυχίας $2p(1-p)$. Άρα

$$E[X] = \frac{1}{2p(1-p)}$$

(γ) Η πιθανότητα επιτυχίας του πειράματος είναι $2p(1-p)$. Άρα η πιθανότητα αποτυχίας θα είναι $1-2p(1-p)$. Το πλήθος των επαναλήψεων που χρειαζόμαστε για πιθανότητα επιτυχίας δ θέλει αρκετές πράξεις και για αυτό θα αλλάξουμε το ερώτημα ώστε να βρούμε το ελάχιστο πλήθος επαναλήψεων ώστε η πιθανότητα αποτυχίας να είναι το πολύ 1-δ. Έστω ότι αυτό το πλήθος είναι k. Τότε θα πρέπει να ισχύει:

$$\left(1-2p(1-p)\right)^k \leq 1-\delta$$

Από την ανίσωση προκύπτει ότι

$$k \geq ln_{1-2p(1-p)}(1-\delta)$$

<u>Θέμα 3:</u>

Έστω ένα NP-πλήρες πρόβλημα που ανήκει στο co-NP. Αφού όλα τα προβλήματα στο NP ανάγονται σε αυτό το πρόβλημα συνεπάγεται ότι για όλα τα προβλήματα στο NP μπορούμε να κατασκευάσουμε μία ανταιτιοκρατική μηχανή που αποφασίζει το συμπληρωματικό του σε πολυωνυμικό χρόνο, δηλαδή το NP είναι υποσύνολο του co-NP. Από αυτό συνεπάγεται ότι το πλήθος των συμπληρωματικών προβλημάτων στο NP είναι υποσύνολο του συνόλου των συμπληρωμάτων των προβλημάτων στο co-NP, δηλαδή το co-NP είναι υποσύνολο του NP. Άρα τα NP και co-NP συμπίπτουν. Η απόδειξη για το ότι κανένα co-NP-πλήρες πρόβλημα δεν μπορεί να ανήκει στο NP είναι συμμετρική.

<u>Θέμα 4:</u>

A) Το πρόβλημα βελτιστοποίησης ορίζεται ως εξής:

Δοθέντος ενός κατευθυντικού γραφήματος $G=(V,E)$ (που αναπαριστά το χάρτη και η κατεύθυνση των ακμών αναπαριστά την δυνατότητα κατεύθυνσης κίνησης του αυτοκινήτου σε έναν δρόμο) και μίας συνάρτησης $f:E\rightarrow\Re^+$ που αποδίδει ένα θετικό βάρος (αντίτιμο) σε κάθε ακμή του γραφήματος, να βρεθεί η διαδρομή P με το μεγαλύτερο συνολικό βάρος από έναν κόμβο $s\in V$ σε έναν προορισμό $t\in V$ έτσι ώστε κανένας κόμβος να μην εμφανίζεται παραπάνω από μία φορά στην διαδρομή P.

Το αντίστοιχο πρόβλημα απόφασης ορίζεται ως εξής: Δοθέντος ενός κατευθυντικού γραφήματος $G=(V,E)$, μίας συνάρτησης $f:E\rightarrow\Re^+$ που αποδίδει ένα θετικό βάρος σε κάθε ακμή του γραφήματος και ενός θετικού αριθμού k, υπάρχει διαδρομή P με συνολικό βάρος τουλάχιστον ίσο με k από μία δοθείσα κορυφή $s\in V$ σε έναν δοθέντα προορισμό $t\in V$ έτσι ώστε κανένας κόμβος να μην εμφανίζεται παραπάνω από μία φορά στην διαδρομή P;

Πιο τυπικά (σε μορφή γλώσσας):

ΠΤ={ $\langle G,f,s,t,k\rangle$ | Το $G=(V,E)$ είναι ένα κατευθυντικό γράφημα με θετικά βάρη στις ακμές που δίνονται από τη συνάρτηση $f:E\rightarrow\Re^+$ και έχει μία διαδρομή P από τον κόμβο $s\in V$ προς έναν κόμβο $t\in V$ με συνολικό αθροιστικό βάρος $\geq k$}.

B) Πρέπει να δείξουμε ότι το πρόβλημα ΠΤ $\in$ NP. Ο επαληθευτής παίρνει σαν είσοδο ένα στιγμιότυπο του προβλήματος (G,f,s,t,k) και το πιστοποιητικό που είναι απλά μία διαδρομή P στο γράφημα $G=(V,E)$. Ελέγχει αν η διαδρομή P ξεκινά από τον κόμβο s καταλήγει στον κόμβο t και ότι αποτελείται από μία ακολουθία ακμών που καθιστούν το μονοπάτι έγκυρο. Ένα μονοπάτι $P=e_1,e_2,\ldots,e_n$ είναι έγκυρο για το γράφημα G αν $e_i\in E$, $1 \leq i \leq n$ και αν $e_i=(u,v)$ τότε $e_{i+1}=(v,w)$. Αυτό μπορεί να γίνει εύκολα με μία απλή διαπέραση της διαδρομής στο G. Έπειτα ελέγχει ότι κάθε ένας κόμβος του G εμφανίζεται το πολύ μία φορά στο P το οποίο μπορεί να επιτευχθεί σημαδεύοντας κάθε κόμβο του G που ανήκει στο P μέχρι είτε να τελειώσει το P, οπότε συνεχίζουμε την επαλήθευση, είτε μέχρι να σημαδευθεί ήδη σημαδεμένος κόμβος οπότε και απορρίπτουμε. Τέλος, αθροίζει τα βάρη των ακμών στη διαδρομή P και αν είναι $\geq k$ ο επαληθευτής αποδέχεται τη λύση αλλιώς απορρίπτει. Τα παραπάνω βήματα μπορούν να υλοποιηθούν σε πολυωνυμικό χρόνο ως προς το πλήθος των κόμβων του γραφήματος και άρα το ΠΤ $\in$ NP.

Γ) Θα ανάγουμε το πρόβλημα εύρεσης κύκλου Hamilton σε κατευθυντικό γράφημα στο πρόβλημα ΠΤ. Δοθέντος ενός γραφήματος $G=(V,E)$ που αποτελεί στιγμιότυπο του προβλήματος εύρεσης Hamilton κύκλου σε κατευθυντικό γράφημα θα κατασκευάσουμε ένα στιγμιότυπο S του ΠΤ ώστε ο G να έχει κύκλο Hamilton αν και μόνο αν στο S υπάρχει μεγάλη διαδρομή όπως αυτή θα οριστεί παρακάτω.

Κατασκευή: Επιλέγουμε έναν κόμβο v του G και τον διασπάμε σε δύο κόμβους, τον v_1 και v_2. Έπειτα προσθέτουμε την ακμή (v_2, v_1) στο γράφημα. Κάθε ακμή από τον v σε κάποιο άλλο κόμβο θα ξεκινά από τον κόμβο v_1. Κάθε ακμή που έδειχνε στο v τώρα θα δείχνει στον v_2. Σε αυτό το νέο γράφημα $G'=(V',E')$ που προκύπτει με την παραπάνω διαδικασία ορίζουμε τη συνάρτηση βάρους ως εξής: $f(e)=1$ για κάθε $e \in E'$ (κάθε ακμή έχει βάρος 1). Τέλος, ορίζουμε ως $k=|V'|-1=|V|$. Το $\langle G',f,v_1,v_2,k \rangle$ αποτελεί στιγμιότυπο του προβλήματος ΠΤ. Θα αποδείξουμε ότι το G έχει κύκλο Hamilton αν και μόνο αν το G' έχει μία διαδρομή από τον v_1 στον v_2 με συνολικό βάρος $\geq k$.

$\Rightarrow$ Έστω ότι το G έχει ένα κατευθυντικό κύκλο Hamilton. Θα δείξουμε ότι το $\langle G',f,v_1,v_2,k \rangle$ ανήκει στη γλώσσα ΠΤ. Έστω ότι $C \subseteq E$ είναι οι ακμές του κατευθυντικού κύκλου Hamilton. Αυτές οι ακμές αντιστοιχούν σε ακμές του G'. Όμως αυτές οι ακμές ορίζουν μία διαδρομή από τον v_1 στον v_2 με συνολικό βάρος ίσο με $|V'|-1=|V|$ χωρίς να υπάρχει επανάληψη κόμβων (αφού ήταν κύκλος Hamilton στο G). Επομένως, το στιγμιότυπο $\langle G',f,v_1,v_2,k \rangle$ ανήκει στο ΠΤ.

$\Leftarrow$ Έστω ότι υπάρχει μία διαδρομή $P \subseteq E'$ από τον v_1 στον v_2 του γραφήματος G' με συνολικό βάρος ίσο με $|V'|-1=|V|$. Αφού κανένας κόμβος δεν επαναλαμβάνεται στο P και το μήκος του είναι $|V|$, θα πρέπει κάθε κόμβος του G' να ανήκει στη διαδρομή P. Προσθέτοντας την ακμή (v_2, v_1) στην P παίρνουμε έναν κύκλο που περνάει από κάθε κόμβο του G' μία και μόνο μία φορά. Αυτός όμως είναι ένας κύκλος Hamilton στο G'. Αυτό συνεπάγεται και την ύπαρξη κύκλου Hamilton στο G μιας και αυτός κατασκευάζεται συγχωνεύοντας τους δύο κόμβους v_1 και v_2 σε έναν κόμβο: στον κόμβο v. Άρα ο G έχει κύκλο Hamilton.

Η αναγωγή μας είναι πολυωνυμική, και αφού, λόγω του υποερωτήματος (Β), το πρόβλημα ΠΤ ανήκει στην κλάση NP, συμπεραίνουμε ότι είναι NP-πλήρες.

<u>Θέμα 5:</u>

1. Λ
2. Σ
3. Σ
4. Λ
5. Σ
6. Σ
7. Λ
8. Λ
9. Λ
10. Λ