

Ασκήσεις Κατανόησης

Καταληκτική Ημερομηνία Παράδοσης: 12/11/2015

(με email στον βοηθό μαθήματος σε μορφή .pdf και .doc – και τα δύο αρχεία θα στείλετε)

1. (20%) Να μεταφραστεί η δήλωση «Κάποιος φοιτητής πέρασε όλα τα μαθήματα στα οποία εξετάστηκε» σε λογική έκφραση χρησιμοποιώντας τις παρακάτω συναρτησιακές προτάσεις:

$S(x)$: «ο x είναι φοιτητής»

$M(y)$: «το y είναι μάθημα»

$E(x,y)$: «ο φοιτητής x εξετάστηκε στο μάθημα y »

$P(x,y)$: «ο φοιτητής x πέρασε το μάθημα y »

Να ορίσετε κατάλληλα τους τομείς αναφοράς των μεταβλητών.

2. (20%) Τρεις ύποπτοι, ο A , ο B και ο Γ δίνουν τις εξής καταθέσεις:

Ο A λέει: «ο B είναι ένοχος και ο Γ είναι αθώος.»

Ο B λέει: «αν ο A είναι ένοχος τότε και ο Γ είναι ένοχος.»

Ο Γ λέει: «είμαι αθώος και τουλάχιστον ένας από τους υπόλοιπους είναι ένοχος.»

Έστω p, q, r τρεις προτασιακές μεταβλητές οι οποίες δηλώνουν αντίστοιχα «ο A είναι αθώος», «ο B είναι αθώος» και «ο Γ είναι αθώος». Φτιάξτε (σε έναν μοναδικό πίνακα) τους πίνακες αληθείας των τριών προτάσεων που αντιστοιχούν στις παραπάνω τρεις καταθέσεις.

(1) Μπορούν οι τρεις καταθέσεις να είναι ταυτόχρονα αληθείς; Αν ναι, τότε ποιος είναι αθώος και ποιος είναι ένοχος;

(2) Υπάρχει μία κατάθεση η οποία όταν είναι αληθής συνεπάγεται μία άλλη. Ποια είναι η μία και ποια είναι η άλλη;

(3) Αν υποθέσουμε ότι και οι τρεις ύποπτοι είναι αθώοι, ποιος έδωσε ψευδή κατάθεση και ποιος αληθή;

3. (20%) (1) Εξηγείστε αν η παρακάτω πρόταση είναι αντίφαση, ταυτολογία ή τίποτε από τα δύο χρησιμοποιώντας πίνακα αληθείας.

$$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$$

(2) Εξηγείστε, χρησιμοποιώντας το (1), αν η παρακάτω πρόταση είναι αντίφαση, ταυτολογία ή τίποτε από τα δύο.

$$p \wedge (p \rightarrow q) \wedge \neg q$$

(3) Γράψτε την πρόταση $(\varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow \psi$ σε διαζευκτική μορφή (δηλ. στην μορφή $\theta_1 \vee \dots \vee \theta_n$, $n > 1$, όπου τα θ_i είναι συζευξίσιμα μεταβλητών ή των αρνήσεών τους $(\varphi, \psi, \neg\varphi, \neg\psi)$).

(4) Χρησιμοποιώντας το (3) δείξτε πως η πρόταση $(\varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow \psi$ είναι ισοδύναμη με μία πρόταση της μορφής $\theta \vee \neg\theta$, και δώστε δύο ισοδύναμες μορφές της πρότασης θ .

4. (20%) Να δείξετε ότι με δεδομένο ότι η λογική πρόταση $\psi = \forall x (A(x) \leftrightarrow [F(x) \vee \exists y (P(x,y) \wedge A(y))])$ είναι αληθής τότε η λογική πρόταση $\varphi = \exists x \neg A(x) \rightarrow \exists x \neg F(x)$ είναι έγκυρο συμπέρασμά της.

5. (20%) Να κάνετε τις εξής αποδείξεις:

(α) Αν το γινόμενο δύο θετικών πραγματικών αριθμών είναι μεγαλύτερο από 100 τότε τουλάχιστον ένας από τους αριθμούς είναι μεγαλύτερος του 10. Χρησιμοποιήστε έμμεση απόδειξη.

(β) Να δείξετε με αντίφαση την πρόταση «Δεν υπάρχει μέγιστος άρτιος ακέραιος αριθμός.»

(γ) Να δείξετε ότι κάποιο ψηφίο εμφανίζεται άπειρες φορές στην δεκαδική αναπαράσταση του π (3.14159....).

(δ) Να δείξετε αν η παρακάτω πρόταση είναι αληθής ή ψευδής χρησιμοποιώντας απόδειξη με αντιπαράδειγμα: «αν ο n^2 είναι ρητός τότε και ο n είναι ρητός».