Ασκήσεις Κατανόησης στην Βαθμιδωτή Αριθμητική, Μαθηματική Επαγωγή, Σύνολα, Συναρτήσεις/Σχέσεις

Καταληκτική Ημερομηνία Παράδοσης: 8/12/2015

(με email στον βοηθό μαθήματος σε μορφή .pdf ή .doc)

Να αναγράφετε στο παραδοτέο σας το ΑΕΜ και το όνομά σας.

1. (20%) Έστω ότι Α είναι το σύνολο όλων των σημείων στο επίπεδο χωρίς το σημείο (0,0). Δηλαδή, $A=\{(x,y) \mid x,y\in R\} - \{(0,0)\}$. Ορίζουμε την σχέση Τ στο Α:

(a,b) T (c,d): τα σημεία (a,b) και (c,d) βρίσκονται στην ίδια ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων

Σας ζητούνται τα εξής:

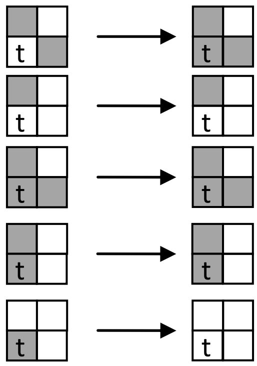
α) Να δείξετε ότι η Τ είναι σχέση ισοδυναμίας.

β) Να περιγράψετε τις αντίστοιχες κλάσεις ισοδυναμίας.

γ) Αν το σύνολο Α περιέχει και το σημείο (0,0) (δηλαδή είναι όλο το επίπεδο) τότε η Τ είναι σχέση ισοδυναμίας;

2. (20%) Να δείξετε ότι για όλα τα σύνολα Α, Β και Γ ισχύει ότι: Αν $A \cap \Gamma \subseteq B \cap \Gamma$ και $A \cap \bar{\Gamma} \subseteq B \cap \bar{\Gamma}$ (με $\bar{\Gamma}$ αναπαριστούμε το συμπλήρωμα του Γ) τότε ισχύει $A \subseteq B$.

3. (20%) Έστω μία άπειρη σκακιέρα με τετράγωνα, όπου όλα τα τετράγωνα αρχικά είναι λευκά πλην ενός αρχικού συνόλου M_0 με n μαύρα τετράγωνα, όπου το M_0 αποτελεί την αρχική διαμόρφωση των μαύρων τετραγώνων. Ορίζουμε νέες διαμορφώσεις από μαύρα τετράγωνα ως εξής: ένα τετράγωνο t θα ανήκει στο M_k (θα είναι μαύρο δηλαδή μετά από k βήματα) αν και μόνο αν δύο τετράγωνα μεταξύ των t, του τετραγώνου πάνω από το t και του τετραγώνου δεξιά του t ανήκουν στη διαμόρφωση M_{k-1}. Χρησιμοποιείστε ισχυρή επαγωγή για να δείξετε ότι $M_n = \emptyset$, δηλαδή μετά από n βήματα σε μία αρχική διαμόρφωση M_0 με n μαύρα τετράγωνα, κανένα τετράγωνο δεν θα είναι μαύρο. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται μερικές περιπτώσεις μόνο για το τετράγωνο t.



4. (20%) Να δείξετε ότι ισχύει για κάθε σύνολο Α και Β ότι $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$. Να δείξετε αν και το αντίστροφο είναι αληθές. Δηλαδή να δείξετε αν ισχύει για όλα τα σύνολα ότι $P(A \cup B) \subseteq P(A) \cup P(B)$. Με $P(A)$ αναπαριστούμε το δυναμοσύνολο του συνόλου Α.

5. (20%) α) Να δείξετε ότι ο αριθμός $n^4 + 4$ δεν είναι πρώτος για κάθε $n > 1$.

β) Έστω οι περιττοί πρώτοι 3, 5, 7, 11, 13, 17, …σε αύξουσα σειρά (p_1, p_2, p_3,…). Να αποδείξετε αν ισχύει ή όχι η εξής πρόταση: Για κάθε *i* ισχύει ότι $p_i p_{i+1}+2$ είναι πρώτος.

Ενδεικτικές Λύσεις

1. α) Αρκεί να δείξουμε ότι η σχέση είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική.

Η Τ είναι ανακλαστική: Πράγματι το (a,b) κείται στην ίδια ευθεία με τον εαυτό του, δηλαδή στην ευθεία y=bx/a (αν a≠0) ή στην ευθεία x=0 αν a=0.

Η Τ είναι συμμετρική: αν τα σημεία (a,b) και (c,d) κείνται στην ίδια ευθεία διαμέσου της αρχής των αξόνων τότε και το (c,d) και το (a,b) κείνται στην ίδια ευθεία. Δηλαδή, (a,b) Τ (c,d) → (c,d) Τ (a,b).

Η Τ είναι μεταβατική: έστω ότι τα σημεία (a,b) και (c,d) κείνται στην ίδια ευθεία L διαμέσου της αρχής των αξόνων και έστω ότι τα σημεία (c,d) και (e,f) κείνται και αυτά στην ίδια M ευθεία διαμέσου της αρχής των αξόνων. Οι ευθείες L και M περιέχουν και οι δύο τα διαφορετικά σημεία (0,0) και (c,d). Άρα η ευθεία L συμπίπτει με την ευθεία M και αυτή η ευθεία περιέχει και τα σημεία (a,b) και (e,f). Άρα τα σημεία (a,b) και (e.f) ανήκουν στην ίδια ευθεία και άρα είναι μεταβατική.

β) Κάθε κλάση ισοδυναμίας είναι ένα υποσύνολο σημείων του Α πάνω σε μία ευθεία της μορφής y=mx ή της κάθετης ευθείας x=0.

γ) Σε αυτή την περίπτωση η Τ δεν είναι σχέση ισοδυναμίας μιας και η ιδιότητα της μεταβατικότητας δεν ικανοποιείται. Ως αντιπαράδειγμα, ενώ (1,2) Τ (0,0) και (0,0) Τ (2,2) δεν ισχύει (1,2) Τ (2,2) μιας και αυτή η ευθεία για τα σημεία (1,2) και (2,2) δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

2. Έστω ότι x∈Α. Αρκεί να δείξουμε ότι και x∈Β. Θα πάρουμε δύο περιπτώσεις με βάση αν x∈Γ ή $x \in \bar{\Gamma}$.

Έστω ότι x∈Γ. Με δεδομένο ότι x∈Α προκύπτει ότι $x \in A \cap \Gamma$. Αφού όμως $A \cap \Gamma \subseteq B \cap \Gamma$, συνεπάγεται ότι $x \in B \cap \Gamma$ και άρα x∈Β.

Έστω ότι $x \in \bar{\Gamma}$. Με δεδομένο ότι x∈Α προκύπτει ότι $x \in A \cap \bar{\Gamma}$. Αφού όμως $A \cap \bar{\Gamma} \subseteq B \cap \bar{\Gamma}$, συνεπάγεται ότι $x \in B \cap \bar{\Gamma}$ και άρα x∈Β.

Επομένως, και στις δύο περιπτώσεις αν x∈Α τότε x∈Β. Επομένως, αποδείξαμε ότι $A \subseteq B$.

3. Βάση: Αν ξεκινήσουμε με ένα μαύρο τετράγωνο, δεν θα υπάρχει κανένα τετράγωνο στο M_1. Πράγματι από τον κανόνα το συγκεκριμένο τετράγωνο θα γίνει λευκό.

Επαγωγικό βήμα: Η επαγωγική υπόθεση είναι ότι αν το M_0 περιέχει k<n τετράγωνα τότε $M_k = \varnothing$. Έστω μία διαμόρφωση M_0 με n τετράγωνα. Έστω R το μικρότερο ορθογώνιο που περικλείει όλα τα τετράγωνα του M_0 (το ορθογώνιο αυτό είναι εύκολο να χαρακτηρισθεί από το αριστερότερο, δεξιότερο, πιο πάνω από όλα και πιο κάτω από όλα τετράγωνα). Έστω ότι $M_{\kappa 0}$ είναι όλα τα μαύρα τετράγωνα του M_0 χωρίς τα τετράγωνα στην χαμηλότερη γραμμή του ορθογωνίου R. Προφανώς, θα υπάρχουν λιγότερα από n μαύρα τετράγωνα στο $M_{\kappa 0}$ λόγω του γεγονότος ότι το R είναι το μικρότερο περικλείον ορθογώνιο. Επιπλέον, το χρώμα των τετραγώνων της τελευταίας γραμμής του R δεν συμμετέχει στον καθορισμό των μαύρων τετραγώνων του $M_{\kappa 0}$ με βάση τον κανόνα αφού

ελέγχουμε μόνο το ίδιο το τετράγωνο, το πάνω και το δεξιά. Επομένως, από την επαγωγική υπόθεση μετά από το πολύ n-1 βήματα δεν θα υπάρχουν μαύρα τετράγωνα στο $M_{κ0}$. Αντίστοιχα, αν ξεκινήσουμε με το σύνολο $M_{α0}$ όπου περιέχει όλα τα μαύρα τετράγωνα του M_0 εκτός αυτών στην αριστερότερη στήλη του R τότε το σύνολο $M_{α0}$ δεν θα περιέχει κανένα μαύρο τετράγωνο μετά από το πολύ n-1 βήματα. Αυτό σημαίνει ότι μετά από n-1 βήματα δεν θα υπάρχει κανένα μαύρο τετράγωνο πάνω από την κατώτερη γραμμή του R και δεξιά από την αριστερότερη στήλη του R. Αν υπάρχει τέτοιο μαύρο τετράγωνο τότε αντίστοιχα θα υπήρχε και στα $M_{κ0}$ ή $M_{α0}$. Επομένως, μετά από n-1 βήματα το μοναδικό τετράγωνο που μπορεί να είναι μαύρο είναι το τετράγωνο στην κάτω αριστερή γωνία του R. Όμως, στο n-οστό βήμα το τετράγωνο αυτό θα γίνει λευκό αφού το πάνω του τετράγωνο και το δεξιά του είναι λευκά. Επομένως, $M_n=\varnothing$. Αποδείχτηκε.

4. Η πρόταση $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$ είναι αληθής. Πράγματι, αν ένα σύνολο $S \in P(A) \cup P(B)$ σημαίνει ότι είτε $S \subseteq A$ ή $S \subseteq B$. Αυτό σημαίνει απευθείας ότι $S \subseteq A \cup B$ και άρα από τον ορισμό του δυναμοσυνόλου προκύπτει ότι $S \in P(A \cup B)$. Επομένως, ισχύει ότι $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$.

Το αντίστροφο δεν ισχύει. Αυτό θα το δείξουμε με αντιπαράδειγμα: έστω A={1,2}, B={2,3} και S={1,3}. Τότε, προφανώς $S \subseteq A \cup B$ και άρα $S \in P(A \cup B)$. Όμως, το S δεν είναι υποσύνολο ούτε του A ούτε και του B και άρα δεν ανήκει στην ένωση των αντίστοιχων δυναμοσυνόλων.

5. α) Θα δείξουμε ότι το n^4+4 γράφεται ως γινόμενο δύο ακέραιων αριθμών και άρα δεν μπορεί να είναι πρώτος. Πράγματι:

$$n^4 + 4 = n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 = (n^2 + 2 + 2n)(n^2 + 2 - 2n)$$

β) Θα δοκιμάσουμε μερικές περιπτώσεις για να δούμε αν ισχύει ή να πάρουμε κάποια διαίσθηση για την απόδειξη.

$$3 \times 5 + 2 = 17$$

$$5 \times 7 + 2 = 37$$

$$7 \times 11 + 2 = 79$$

$$11 \times 13 + 2 = 145$$

Όμως το 145 δεν είναι πρώτος αριθμός (διαιρείται με το 5) και άρα βρήκαμε ένα αντιπαράδειγμα.