Ασκήσεις Κατανόησης στα Αθροίσματα και στην Συνδυαστική

Καταληκτική Ημερομηνία Παράδοσης: 8/1/2016

(με email στον βοηθό μαθήματος σε μορφή .pdf ή .doc)

Να αναγράφετε στο παραδοτέο σας το ΑΕΜ και το όνομά σας.

1. (15%) Κάνοντας χρήση ενός συνδυαστικού επιχειρήματος αποδείξτε ότι η ποσότητα $\frac{(10!)!}{(10!)^{9!}}$ είναι ακέραιος αριθμός.

2. Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα αλφάβητο το οποίο αποτελείται από 4Α, 5Β και 3Γ (τα γράμματα κάθε ομάδας είναι μη διακριτά μεταξύ τους, π.χ. όλα τα Α θεωρούνται ίδια). Πόσες λέξεις μήκους 12 (με πόσους τρόπους μπορούμε να μεταθέσουμε τα γράμματα σε 12 θέσεις) αν:

α) **(5%)** Δεν έχουμε κανέναν περιορισμό.

β) **(15%)** Πρέπει να εμφανίζεται μέσα στην λέξη οπωσδήποτε η συμβολοσειρά ΒΒΒ.

3. (15%) Κατά πόσους τρόπους 7 άνδρες μπορούν να επιλεγούν από 12 έτσι ώστε δύο συγκεκριμένοι απ’ αυτούς να μην είναι ποτέ μαζί; Γενικεύστε θέτοντας n αντί για 12 και k αντί για 7.

4. (20%) Θεωρούμε όλα τα σημεία (α,β) στο επίπεδο με α,β ακεραίους. Ορίζουμε ως ***βήμα***

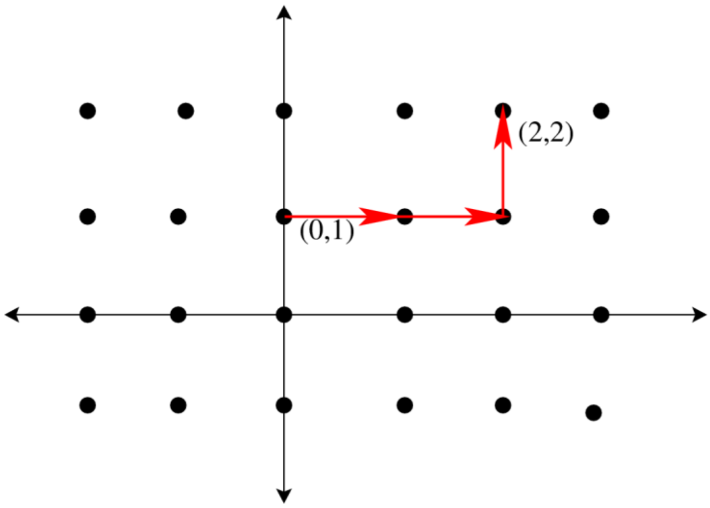
Δ: τη μετάβαση από το σημείο (α,β) στο (α+1,β)

Α: τη μετάβαση από το σημείο (α,β) στο (α-1,β)

Π: τη μετάβαση από το σημείο (α,β) στο (α,β+1) και

Κ: τη μετάβαση από το σημείο (α,β) στο (α,β-1)

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται μία ακολουθία 3 βημάτων (ΔΔΠ) με αρχή το (0,1) και τέλος το (2,2).



Α) Πόσες είναι οι διαφορετικές ακολουθίες βημάτων που δεν περιλαμβάνουν βήματα Α και Κ, οι οποίες ξεκινούν από το (0,0) και να καταλήγουν στο (x,y) με $x>0$, $y>0$;

Β) Πόσες είναι οι διαφορετικές ακολουθίες βημάτων που δεν περιλαμβάνουν βήματα Α και Κ, οι οποίες ξεκινούν από το (0,0), διέρχονται διαδοχικά από τα σημεία (3,2) και (4,5) και καταλήγουν στο (x,y), όπου $x>4$, $y>5$;

Γ) Πόσες είναι οι διαφορετικές ακολουθίες βημάτων μήκους $2n$, που ξεκινούν από το (0,0), διέρχονται από το σημείο $(k,n-k)$, $0\leq k\leq n$, και καταλήγουν στο (0,0);

5. (15%) α) Βρείτε το πλήθος των μεταθέσεων όλων των 24 γραμμάτων του αλφάβητου που να περιέχει τουλάχιστον μία από τις λέξεις ΠΥΓΜΗ, ΤΖΑΚΙ, ΒΕΛΟΣ.

β) Να βρείτε το πλήθος των μεταθέσεων των 24 γραμμάτων του αλφάβητου που να περιέχει τουλάχιστον μία εκ των λέξεων: ΤΗΝ, ΣΤΗΝ, ΑΣΤΗΝ, ΧΑΣΤΗΝ.

γ) Πόσοι θετικοί ακέραιοι ≤ 1000 είναι σχετικά πρώτοι με το 15.

6. (15%) α) Να υπολογίσετε προσεγγιστικά το άθροισμα: $\sum_{i=1}^{n} \sqrt[3]{i}$

β) Να υπολογίσετε ακριβώς το άθροισμα: $S_n(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i}$ $(|x| < 1)$

γ) Να δείξετε ότι το ο κλειστός τύπος του αθροίσματος $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)}$ είναι $\frac{n}{2n+1}$.

Ενδεικτικές Λύσεις

1. Το ερώτημα μας οδηγεί στη χρήση ενός συνδυαστικού επιχειρήματος, μας προτρέπει δηλαδή να ψάξουμε για ένα συνδυαστικό πρόβλημα που η λύση του είναι η συγκεκριμένη ποσότητα. Αν το καταφέρουμε δείχνουμε και το ζητούμενο, καθώς η λύση ενός συνδυαστικού προβλήματος μπορεί να είναι μόνο ακέραιος αριθμός. Το γεγονός ότι παρατηρούμε ένα παραγοντικό όρο στον αριθμητή και το γινόμενο πολλών όρων στον παρονομαστή μας θυμίζει τη λύση σε πρόβλημα μεταθέσεων ομάδων όμοιων αντικειμένων. Πράγματι ας υποθέσουμε ότι έχουμε 10! αντικείμενα και ας υποθέσουμε ότι αυτά μπορούν να χωριστούν σε ομάδες που κάθε μια περιλαμβάνει 10 όμοια μεταξύ τους αντικείμενα. Οι ομάδες που δημιουργούνται είναι 10!/10=9!. Αν λοιπόν υπολογίσουμε τους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να μεταθέσουμε τα 10! αντικείμενα, αυτοί θα είναι

$$\frac{(10!)!}{\underbrace{10!\cdot 10!\cdot 10!\cdots 10!}_{9!\ \text{φορές}}}=\frac{(10!)!}{(10!)^{9!}}$$

που είναι υποχρεωτικά ακέραιος αριθμός.

2. α) Το πρώτο υποερώτημα αποτελεί τυπικό παράδειγμα μεταθέσεων n=12 αντικειμένων όπου υπάρχουν l=3 ομάδες όμοιων αντικειμένων που αποτελούνται από 4,5 και 3 αντικείμενα αντίστοιχα. Ο αριθμός των διαφορετικών λέξεων υπολογίζεται ως εξής:

$$\frac{12!}{4!5!3!}$$

β) Ας θεωρήσουμε αρχικά όλα τα υπόλοιπα γράμματα πλην της συμβολοσειράς BBB. Εφαρμόζοντας τον τύπο που χρησιμοποιήσαμε και στο προηγούμενο υποερώτημα, υπολογίζουμε τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορούμε να διατάξουμε τα 9 γράμματα (4A, 2B, 3Γ) που είναι 9!/(4!2!3!). Τότε υπάρχουν 10 δυνατές θέσεις για να τοποθετήσουμε ένα ακόμη αντικείμενο:

_X_X_X_X_X_X_X_X_X_

Το αντικείμενο όμως που καλούμαστε να τοποθετήσουμε είναι το BBB, και εφόσον το γράμμα B περιέχεται ήδη στις διατάξεις που έχουμε υπολογίσει, θα πρέπει για κάθε διάταξη να εξετάσουμε πόσες από τις δυνατές τοποθετήσεις του BBB οδηγούν σε διαφορετικές μεταξύ τους λέξεις μήκους 12.

Θα δείξουμε ότι για κάθε διάταξη υπάρχουν μόνο 8 τοποθετήσεις που οδηγούν σε διαφορετικές λέξεις. Πράγματι αν σε μια διάταξη των 9 γραμμάτων, τα δύο B δεν βρίσκονται σε σειρά, όπως για παράδειγμα στη:

_X_B_X_X_X_B_X_X_X_

τότε η τριάδα BBB είτε μπει μπροστά είτε πίσω από κάποιο B δίνει το ίδιο αποτέλεσμα. Θα πρέπει να προσέξουμε ότι το συμπέρασμα αυτό ισχύει και αν ακόμη το ένα ή και τα δύο B βρίσκονται στα άκρα της διάταξης.

Αν τα 2B είναι συνεχόμενα

_X_X_X_B_B_X_X_X_X_

τότε η τριάδα BBB είτε μπει πριν από το πρώτο B, είτε ανάμεσα στα δύο B, είτε μετά το δεύτερο B δίνει το ίδιο αποτέλεσμα. Άρα και πάλι υπάρχουν 8 τοποθετήσεις που οδηγούν σε διαφορετικές λέξεις.

Δείξαμε λοιπόν ότι για κάθε διάταξη των γραμμάτων 4A, 2B, 3Γ δημιουργούνται 8 διαφορετικές λέξεις μήκους 12 με τοποθέτηση της συμβολοσειράς BBB. Σύμφωνα με τον κανόνα του γινομένου υπάρχουν 8*[9!/(4!2!3!)]=10080 διαφορετικές λέξεις μήκους 12.

3.

Λύση Α:

Το πρόβλημα θα λυθεί γενικά αρχικά και στη συνέχεια θα τοποθετήσουμε τα συγκεκριμένα νούμερα. Έστω λοιπόν ότι n ο αριθμός των ανδρών. Ας θεωρήσουμε ότι A1 και A2 είναι οι δύο άνδρες που δε θα πρέπει να είναι μαζί. Τότε προφανώς οι υπόλοιποι άνδρες είναι σε αριθμό n-2. Ας θεωρήσουμε λοιπόν 2 σύνολα ανδρών. Το σύνολο που αποτελείται από τους n-2 άνδρες και τον A1, και το σύνολο που αποτελείται από τους n-2 άνδρες και τον A2. Τότε αν θεωρήσουμε ξεχωριστά τα δύο σύνολα και πάρουμε τους συνδυασμούς k ανδρών από κάθε σύνολο κανένας από τους συνδυασμούς αυτούς δεν θα περιλαμβάνει ταυτόχρονα τους A1 και A2. Για κάθε ένα από τα σύνολα n-1 ανδρών οι δυνατοί συνδυασμοί είναι:

$$C(n-1,k)= \frac{(n-1)!}{k!\cdot(n-1-k)!}$$

Για να βρούμε λοιπόν το τελικό αποτέλεσμα θα πρέπει να προσθέσουμε τους συνδυασμούς που προκύπτουν από τα δύο σύνολα και να αφαιρέσουμε τους συνδυασμούς που είναι κοινοί. Αυτοί όμως είναι οι συνδυασμοί k ανδρών από τους n-2 άνδρες που είναι κοινοί και για τα δύο σύνολα. Άρα οι κοινοί συνδυασμοί είναι:

$$C(n-2,k)= \frac{(n-2)!}{k!\cdot(n-2-k)!}$$

Με βάση τα παραπάνω το ζητούμενο προκύπτει από τον παρακάτω τύπο:

$$2\frac{(n-1)!}{k!\cdot(n-1-k)!} - \frac{(n-2)!}{k!\cdot(n-2-k)!}$$

Αντικαθιστώντας τα νούμερα παίρνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$2\frac{11!}{7!\cdot(4)!} - \frac{10!}{7!\cdot 3!} = 2x330-120=540$$

Λύση Β:

Μπορούμε να διαλέξουμε τους k άνδρες με τρεις τρόπους:

- Τον Α1 και k-1 από τους υπόλοιπους n-2 (εξαιρούμε και τον Α2 από τους υπόλοιπους)
- Τον Α2 και k-1 από τους υπόλοιπους n-2 (εξαιρούμε και τον Α1 από τους υπόλοιπους)
- Κανέναν από τους Α1 και Α2, άρα k από τους υπόλοιπους n-2

Άρα υπάρχουν $\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-2}{k}=2\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-2}{k}$ τρόποι

Για n=12 και k=7 ο παραπάνω τύπος δίνει και πάλι 540 δυνατούς τρόπους επιλογής.

Σημείωση: Η άσκηση θα θεωρηθεί απόλυτα σωστή και αν υπολογίσετε τον αριθμό των συνδυασμών που προκύπτουν αν μία θέση από τις 7 είναι πιασμένη υποχρεωτικά από έναν από τους δύο συγκεκριμένους άντρες. Στην περίπτωση αυτή οι δύο άντρες Α1 και Α2 δεν είναι ποτέ μαζί, ούτε στους 7 που επιλέγουμε ούτε στους 5 που μένουν Άρα ισχύουν μόνο οι 2 από τους παραπάνω τρεις τρόπους επιλογής και οι δυνατοί συνδυασμοί είναι:

$$2\cdot\binom{n-2}{k-1}=\frac{2\cdot(n-2)!}{(k-1)!\cdot(n-1-k)!}=\frac{2\cdot 10!}{6!4!}=420 \text{ τρόποι}$$

4.

Α) Ας θεωρήσουμε *x* σε πλήθος βήματα Δ και *y* σε πλήθος βήματα Π. Τότε ξεκινώντας από το σημείο (0,0), με οποιαδήποτε σειρά και αν εκτελέσουμε τα παραπάνω βήματα θα καταλήξουμε στο σημείο (*x*,*y*). Επιπλέον οποιαδήποτε προσθήκη η απομάκρυνση βήματος Δ ή Π θα δημιουργήσει ακολουθία βημάτων που δεν καταλήγει στο (*x*,*y*). Επομένως έχουμε πρόβλημα μεταθέσεων δύο ομάδων όμοιων βημάτων, από τις οποίες η πρώτη αποτελείται από *x* σε πλήθος αντικείμενα (βήματα) Δ και η δεύτερη αποτελείται από *y* σε πλήθος αντικείμενα (βήματα) Δ. Το πλήθος των ακολουθιών υπολογίζεται ως εξής:

$$\frac{(x+y)!}{x!y!}$$

Β) Σύμφωνα με την απάντηση στο προηγούμενο ερώτημα, οι τρόποι μετακίνησης από το σημείο (0,0) στο σημείο (3,2) είναι:

$$\frac{(3+2)!}{3!2!}=\frac{5!}{3!2!}$$

Οι τρόποι μετακίνησης από το σημείο (3,2) στο σημείο (4,5) είναι ακριβώς ίσοι με τους τρόπους μετακίνησης από το σημείο (0,0) στο σημείο (1,3):

$$\frac{(1+3)!}{1!3!}=\frac{4!}{1!3!}$$

Οι τρόποι μετακίνησης από το σημείο (4,5) στο σημείο (*x*,*y*) είναι ακριβώς ίσοι με τους τρόπους μετακίνησης από το σημείο (0,0) στο σημείο (*x*-4,*y*-5):

$$\frac{(x-4+y-5)!}{(x-4)!(y-5)!}=\frac{(x+y-9)!}{(x-4)!(y-5)!}$$

Τα παραπάνω τρία γεγονότα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, αλλά πρέπει να συνυπάρξουν προκειμένου η ακολουθία να ξεκινήσει από το (0,0) και να καταλήξει στο (x,y) αφού διέλθει από τα σημεία (3,2), (4,5). Επομένως το πλήθος των ζητούμενων ακολουθιών προκύπτει με εφαρμογή του κανόνα του γινομένου:

$$\frac{5!}{3!2!}\cdot\frac{4!}{1!3!}\cdot\frac{(x+y-9)!}{(x-4)!(y-5)!}=40\frac{(x+y-9)!}{(x-4)!(y-5)!}$$

Γ) Οποιαδήποτε ακολουθία βημάτων ξεκινά από το σημείο (0,0) και καταλήγει στο σημείο $(k,n\text{-}k)$ απαιτεί τουλάχιστον k βήματα Δ και τουλάχιστον $n\text{-}k$ βήματα Π. Αντίστοιχα, οποιαδήποτε ακολουθία βημάτων από το σημείο $(k,n\text{-}k)$ στο σημείο 0 απαιτεί τουλάχιστον k βήματα Α και τουλάχιστον $n\text{-}k$ βήματα Κ. Επομένως μια ακολουθία που ξεκινά από το σημείο (0,0) και καταλήγει στο σημείο (0,0) αφού διέλθει από το σημείο $(k,n\text{-}k)$ απαιτεί τουλάχιστον k βήματα Δ, $n\text{-}k$ βήματα Π, k βήματα Α και $n\text{-}k$ βήματα Κ, δηλαδή τουλάχιστον $k+n\text{-}k+k+n\text{-}k=2n$ συνολικά βήματα. Αφού όμως το ερώτημα αφορά σε ακολουθίες μήκους $2n$, απαιτούνται ακριβώς k βήματα Δ, $n\text{-}k$ βήματα Π, k βήματα Α και $n\text{-}k$ βήματα Κ. Επιπλέον θα πρέπει να προηγηθούν και να εξαντληθούν τα βήματα Δ και Π, αφού οποιαδήποτε παρεμβολή σε αυτά συμβόλου Α ή Κ, θα έχει ως συνέπεια να μη διέλθει η ακολουθία από το σημείο $(k,n\text{-}k)$. Έχουμε δηλαδή δύο προβλήματα μεταθέσεων ομάδων όμοιων αντικειμένων και σε κάθε πρόβλημα υπάρχουν δύο ομάδες όμοιων αντικειμένων από τις οποίες η μία αποτελείται από k αντικείμενα και η άλλη από $n\text{-}k$ αντικείμενα. Τα δύο αυτά γεγονότα είναι ανεξάρτητα και σύμφωνα με τον κανόνα του γινομένου, το ζητούμενο αποτέλεσμα είναι:

$$\frac{(k+n-k)!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{(k+n-k)!}{k!(n-k)!}=\frac{\left(n!\right)^2}{\left(k!\right)^2\left((n-k)!\right)^2}$$

5.

α) Έστω ότι Π, Τ και Β είναι τα σύνολα των μεταθέσεων των 24 γραμμάτων που περιέχουν αντίστοιχα τις λέξεις ΠΥΓΜΗ, ΤΖΑΚΙ και ΒΕΛΟΣ. Άρα το σύνολο των μεταθέσεων που περιέχει τουλάχιστον μία από αυτές τις λέξεις θα είναι η ένωσή τους:

$$|\Pi\cup T\cup B|$$

Από εγκλεισμό-αποκλεισμό προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}|\Pi\cup T\cup B| &= |\Pi|+|T|+|B|-|\Pi\cap T|-|\Pi\cap B|-|T\cap B|+|\Pi\cap T\cap B|\\ &= 20!+20!+20!-16!-16!-16!+12! = 3\cdot 20!-3\cdot 16!+12!\end{aligned}$$

Το $|\Pi|$ είναι 20! αφού τη λέξη ΠΥΓΜΗ μπορούμε να την θεωρήσουμε ως ένα γράμμα (αφού και τα 5 γράμματα θα πρέπει να είναι συνεχόμενα). Επομένως έχουμε τις μεταθέσεις των 19 γραμμάτων συν το ένα καινούργιο που αντιστοιχεί στη λέξη. Ομοίως δουλεύουμε και στα υπόλοιπα.

β) Έστω Τ, Σ, Α και Χ τα σύνολα που αντιστοιχούν στις μεταθέσεις 24 γραμμάτων που περιέχουν τις λέξεις ΤΗΝ, ΣΤΗΝ, ΑΣΤΗΝ και ΧΑΣΤΗΝ αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι $X \subseteq A \subseteq \Sigma \subseteq T$. Αυτό σημαίνει ότι δεν χρειάζεται να μετρήσουμε τίποτα παραπάνω από το Τ. Άρα το πλήθος των μεταθέσεων είναι

$$|X \cup A \cup \Sigma \cup T| = |T| = 22!$$

γ) Ένας ακέραιος είναι σχετικά πρώτος με το 15 αν δεν διαιρείται από το 3 και το 5. Έστω Α το σύνολο των ακεραίων στο διάστημα [1,1000] που διαιρείται από το 3 και Β το αντίστοιχο σύνολο αριθμών που διαιρείται από το 5. Τότε, το πλήθος των αριθμών που δεν είναι σχετικά πρώτοι είναι οι :

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

όπου $|A| = \left\lfloor \frac{1000}{3} \right\rfloor$.

Άρα:

$$|A \cup B| = 333 + 200 - 66 = 467$$

Άρα το πλήθος των αριθμών που είναι σχετικά πρώτοι με το 15 είναι:

$$|\overline{A \cup B}| = 1000 - 467 = 533$$

6.

α) Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της ολοκλήρωσης: Έστω $f(x) = \sqrt[3]{x}$, η οποία είναι αύξουσα συνάρτηση. Ισχύει ότι:

$$\int_0^n x^{\frac{1}{3}}\,dx \leq \sum_{i=1}^{n} \sqrt[3]{i} \leq \int_1^{n+1} x^{\frac{1}{3}}\,dx$$

Ισχύει ότι:

$$\int_0^n x^{\frac{1}{3}}\,dx = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\Big|_0^n = \frac{3}{4}n^{\frac{4}{3}}$$

$$\int_1^{n+1} x^{\frac{1}{3}}\,dx = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\Big|_1^{n+1} = \frac{3}{4}(n+1)^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{4}$$

Άρα:

$$\frac{3}{4}n^{\frac{4}{3}} \leq \sum_{i=1}^{n} \sqrt[3]{i} \leq \frac{3}{4}(n+1)^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{4}$$

β)

Θα χρησιμοποιήσουμε ολοκλήρωση ενός γνωστού αθροίσματος για να υπολογίσουμε το ζητούμενο άθροισμα. Έστω ότι $P_n(x) = \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$. Τότε:

$$\int P_n(x)dx = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{i+1}}{i+1} + c$$

για οποιαδήποτε σταθερά c και άρα και για c=0. Επίσης, αν θέσουμε j=i+1 έχουμε:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j} = S_n(x)$$

Άρα:

$$S_n(x) = \int P_n(x)dx = \int \frac{1}{1-x}dx = -\ln(1-x)$$

γ) Θα το δείξουμε με επαγωγή:

Για n=1 ισχύει αφού: $\frac{1}{1\cdot 3} = \frac{1}{3}$.

Έστω ότι ισχύει για k-1. Τότε για k έχουμε:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)}\right) + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} =$$

από την επαγωγική υπόθεση έχουμε:

$$\frac{k-1}{2k-1} + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{(k-1)(2k+1)+1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{2k^2-k}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{k(2k-1)}{(2k-1)(2k+1)}$$
$$= \frac{k}{2k+1}$$

και επομένως αποδείχτηκε το ζητούμενο.