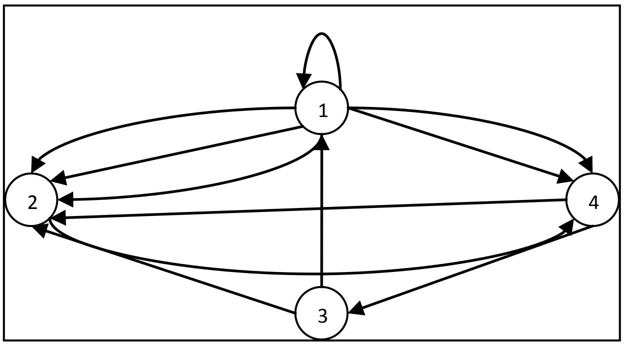
1. Σχεδίαση Κατευθυνόμενων Γραφημάτων (4.8.13)

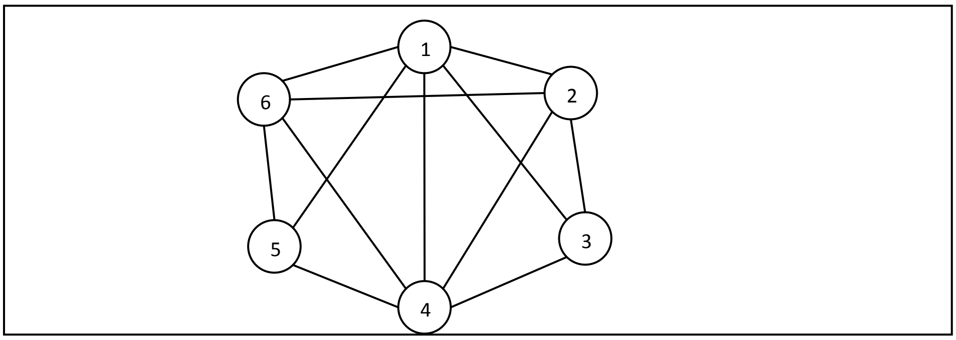
Να σχεδιασθεί το κατευθυνόμενο γράφημα που ορίζεται από τον εξής πίνακα γειτνίασης.

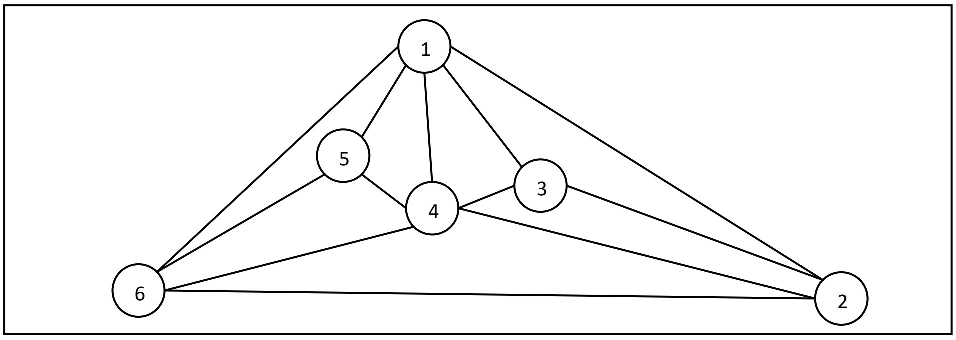
Κορυφές	1	2	3	4
1	1	3	0	2
2	0	0	0	1
3	1	1	0	0
4	0	1	1	0



2. Σχεδίαση(4.8.15)

Να σχεδιαστεί το παρακάτω γράφημα ώστε κανένα ζεύγος ακμών να μην τέμνεται (να είναι δηλαδή επίπεδο). Να γίνει επαλήθευση του θεωρήματος Euler.





Αριθμός κορυφών $|V|=6$

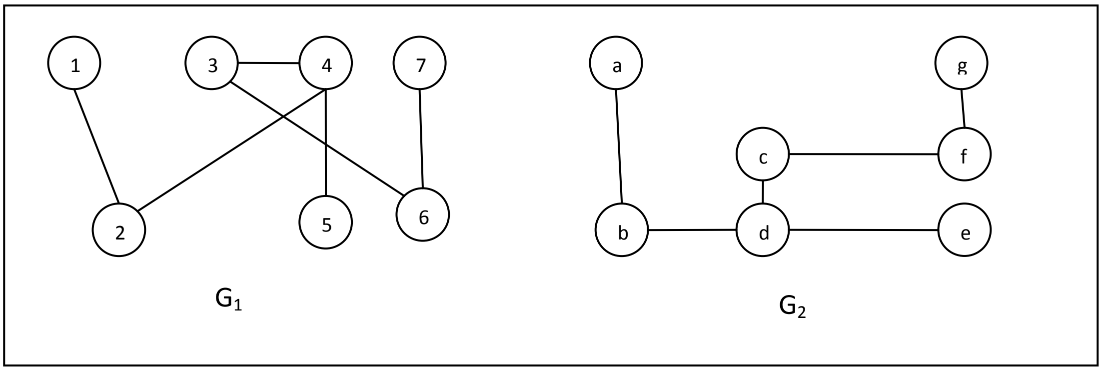
Αριθμός ακμών $|E|=12$

Αριθμός περιοχών R=8.

Ισχύει $|V|-|E|+|R|=2 \rightarrow 6-12+8=2$.

3. Ισομορφισμός(4.8.17)

Να δειχθεί ότι τα γραφήματα είναι ισόμορφα.



Πρέπει να υπάρχει συνάρτηση φ ώστε

$\varphi:V_1=\{1,2,3,4,5,6,7\}\rightarrow V_2=\{a,b,c,d,e,f,g\}$

$\{v,w\} \in E_1 \rightarrow \{\varphi(v),\varphi(w)\} \in E_2$

Παρατηρούμε ότι:

Υπάρχει στο G_1 μόνο μία κορυφή όπου $d(4)=3$

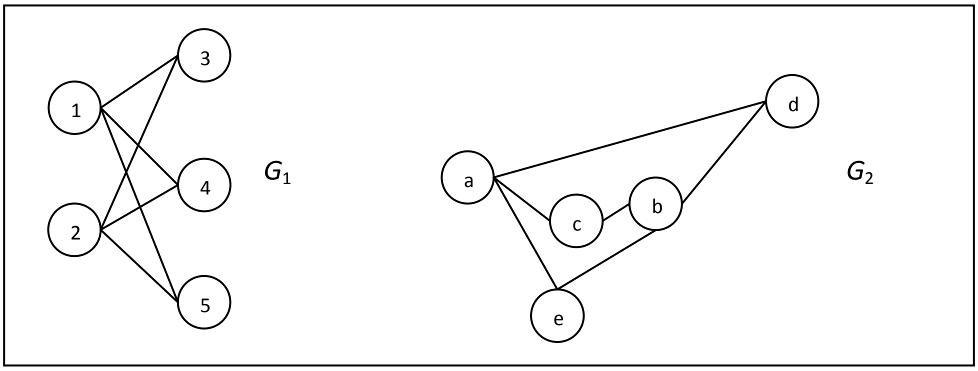
Υπάρχει στο G_2 μόνο μία κορυφή όπου $d(d)=3$

Άρα: $\varphi(4)=d$, $\varphi(3)=c$, $\varphi(1)=a$, $\varphi(5)=e$, $\varphi(2)=b$, $\varphi(6)=f$, $\varphi(7)=g$

Εξάλλου έχουν και τους ίδιους πίνακες γειτνίασης.

4. Ισομορφισμός(4.8.11)

Να δειχθεί ότι τα γραφήματα είναι ισόμορφα.



Παρατηρούμε ότι

$d(1)=d(2)=3$ $d(\mathrm{a})=d(b)=3$

$d(3)=d(4)=d(5)=2$ $d(c)=d(d)= d(e)=2$

Από τον έλεγχο των βαθμών δεν αποκλείεται ο ισομορφισμός.

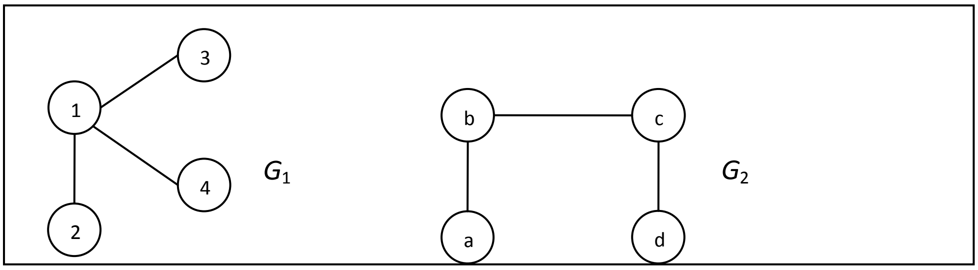
$\varphi(1)=a$ $\varphi(2)=b$ $\varphi(3)=c$ $\varphi(4)=d$ $\varphi(5)=e$

	1	2	3	4	5			a	b	c	d	E
1	0	0	1	1	1		a	0	0	1	1	1
2		0	1	1	1		b		0	1	1	1
3			0	0	0		c			0	0	0
4				0	0		d				0	0
5					0		e					0

Άρα είναι ισόμορφα.

5. Ισομορφισμός(4.8.11)

Να δειχθεί ότι τα γραφήματα είναι ισόμορφα.



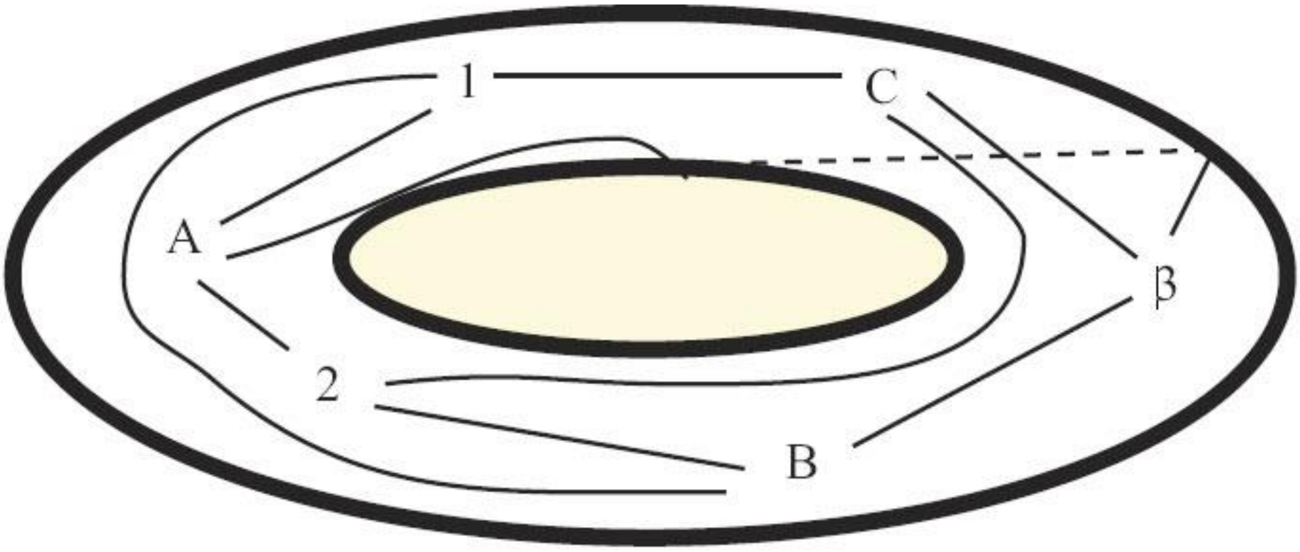
$d(1)=3$ $d(2)=d(3)=d(4)=1$

$d(\mathrm{a})=d(d)=1$ $d(b)=d(c)=2$

Άρα είναι αδύνατο να είναι ισόμορφα.

6. Επίπεδα Γραφήματα (7.3.17)

Να δείξετε ότι ο $K_{3,3}$ είναι επίπεδος όταν γραφτεί σε μία επιφάνεια τύπου ντόνατ.



7. Ισομορφισμός (Rosen 8.3.45)

Να δειχτεί ότι ο ισομορφισμός απλών γραφημάτων είναι σχέση ισοδυναμίας ~ (ανακλαστική – συμμετρική – μεταβατική).

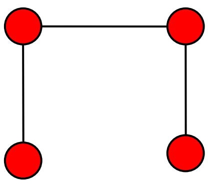
Το *G* είναι ισομορφικό προς τον εαυτό του και άρα είναι ανακλαστική. ($G \sim G$)

Έστω ότι το *G* είναι ισομορφικό προς το *H*. Τότε υπάρχει μία απεικόνιση ένα-προς-ένα *f* από το *G* στο *H* που διατηρεί την γειτονικότητα και την μη-γειτονικότητα. Άρα, η f^{-1} είναι ένα-προς-ένα απεικόνιση από το *H* στο *G* με τις ίδιες ιδιότητες. Άρα ο ισομορφισμός είναι συμμετρικός. ($G \sim H \Rightarrow H \sim G$)

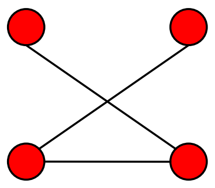
Αν το G είναι ισομορφικό στο H και το H είναι ισομορφικό στο K μέσω των απεικονίσεων *f* και *g* τότε η απεικόνιση $f \circ g$ είναι ένα-προς-ένα απεικόνιση από το G στο K και άρα είναι ισόμορφα ($G \sim H, H \sim K \Rightarrow G \sim K$)

8. Ισομορφισμός (Rosen 8.3.50)

Ένα απλό γράφημα *G* λέγεται αυτό-συμπληρωματικό αν το *G* είναι ισόμορφο με το *G΄*. Να δειχτεί ότι το παρακάτω γράφημα είναι συμπληρωματικό.



Το συμπληρωματικό είναι το:



Το οποίο είναι πράγματι ισόμορφο με το αρχικό γράφημα.

9. Επίπεδο Γράφημα (Rosen 8.7.13)

Έστω επίπεδο συνδεδεμένο γράφημα με 6 κορυφές και καθεμία με βαθμό 4. Σε πόσες περιοχές διαιρείται το επίπεδο από την επίπεδη παράσταση του γραφήματος;

n-m+r=2⇒6-12+r=2⇒r=8

10. Επίπεδο Γράφημα

Αν καμία περιοχή σε ένα επίπεδο γράφημα με R περιοχές και m ακμές δεν έχει λιγότερες από k ακμές για σύνορο, τότε θα ισχύει $kR \leq 2m$

Εφόσον έχουμε R περιοχές, με τουλάχιστον k ακμές για κάθε σύνορο, σημαίνει ότι υπάρχουν τουλάχιστον kR ακμές. Όμως, κάθε ακμή μπορεί να είναι το πολύ σε δύο περιοχές και άρα την μετράω δύο φορές σε κάθε περιοχή. Άρα, $kR \leq 2m$.

11. Επίπεδο Γράφημα (Rosen 935)

Αν το G είναι συνεκτικό επίπεδο απλό γράφημα με e ακμές και v κορυφές, όπου $v \geq 3$, τότε $e \leq 3v$-6.

Έστω ότι έχουμε R περιοχές. Το σύνορο κάθε περιοχής θα έχει μήκος τουλάχιστον 3. Άρα από (10) προκύπτει ότι $3R \leq 2e$. Όμως από τον τύπο του Euler r=e-v+2 από όπου και προκύπτει ότι

$$3(e - v + 2) \leq 2e \rightarrow e \leq 3v - 6$$

12. Επίπεδο Γράφημα (Rosen 936)

Να δείξετε ότι το K_5 δεν είναι επίπεδο.

Το γράφημα K_5 έχει πέντε κορυφές και δέκα ακμές. Όμως η ανισότητα από το 11 δεν ικανοποιείται για αυτές τις τιμές και άρα το γράφημα δεν είναι επίπεδο.

13. Επίπεδο Γράφημα - Μονοπάτια (Θεώρημα 2 – 892)

Έστω ότι το γράφημα G με πίνακα γειτνίασης A ως προς την διάταξη των κορυφών $v_1,v_2,\ldots,v_m$ (επιτρέπονται οι κατευθυνόμενες ή μη κατευθυνόμενες ακμές καθώς και οι βρόγχοι). Το πλήθος των διαφορετικών μονοπατιών μήκους r από το v_i στο v_j είναι ίσο με το κελί (i,j) του πίνακα A^r.

Μαθηματική επαγωγή.

Το πλήθος των μονοπατιών από το v_i στο v_j μήκους 1 θα είναι η εγγραφή (i,j) του πίνακα A, αφού αυτή περιέχει το πλήθος των ακμών μεταξύ των δύο κορυφών.

Έστω ότι η εγγραφή (i,j) του πίνακα A^r είναι το πλήθος των διαφορετικών μονοπατιών μήκους r μεταξύ v_i και v_j. Αφού:

$$A^{r+1} = A^r \cdot A$$

το κελί (i,j) του A^{r+1} θα είναι:

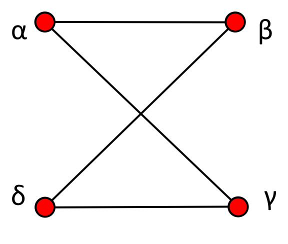
$$b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + \cdots + b_{in}a_{nj}$$

όπου b_{ik} είναι το κελί (i,k) του A^r.

Μία διαδρομή μήκους $r+1$ από το v_i στο v_j αποτελείται από ένα μονοπάτι μήκους r από το v_i σε κάποιον ενδιάμεσο κόμβο v_k και από μία ακμή από το v_k στο v_j. Επομένως, το πλήθος μονοπατιών μήκους $r+1$ θα είναι το γινόμενο του πλήθους των μονοπατιών μήκους r επί το πλήθος των ακμών που είναι διαθέσιμες για την τελευταία ακμή.

14. Επίπεδο Γράφημα - (Παράδειγμα 14 – 8.4)

Πόσα μονοπάτια μήκους 4 υπάρχουν από το α στο δ στο απλό γράφημα G του παρακάτω σχήματος;



Ο πίνακας γειτνίασης του G θα είναι:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Άρα το πλήθος μονοπατιών μήκους 4 είναι το (1,4) του πίνακα A^4.

$$A^4 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Τα οποία είναι:

α,β,α,β,δ

α,β,α,γ,δ

α,β,δ,β,δ κοκ

Άλυτες Ασκήσεις

1. (Rosen 8.3.46) Έστω ότι τα G και H είναι ισόμορφα απλά γραφήματα. Να δειχτεί ότι τα συμπληρωματικά τους G' και H' είναι και αυτά ισόμορφα.

2. (Rosen 8.4.22) Να δείξετε ότι σε κάθε απλό γράφημα υπάρχει μονοπάτι από κάθε κορυφή περιττού βαθμού προς κάποια άλλη κορυφή περιττού βαθμού.

3. (Rosen 8.7.18) Έστω ότι επίπεδο γράφημα έχει k συνδεδεμένες συνιστώσες, e ακμές και v κορυφές. Έστω ότι ακόμα το επίπεδο διαιρείται σε r περιοχές από επίπεδη παράσταση του γραφήματος. Να βρεθεί τύπος για το r σαν έκφραση των e, v και k.

4. Έστω ότι n είναι δύναμη του 2. Να δειχτεί ότι n αριθμοί μπορούν να προστεθούν σε $\log n$ βήματα με χρήση δικτύου n-1 επεξεργαστών.