<u>1. Σχέσεις (1.7.26)</u>

Δίνεται A={1,2,...,10}. Έστω η σχέση R: «ο α διαιρεί τον β», $(\alpha, \beta \in A)$.

1. Να γραφεί η σχέση σαν σύνολο διατεταγμένων ζευγαριών

$$R = \{(\alpha,\beta): \beta = \kappa\alpha, \kappa \in N, \alpha, \beta \in A\} \subseteq A^2$$
$$= \{(1,1),(1,2),\dots,(1,10),(2,2),(2,4),\dots,(2,10),(3,3),(3,6),(3,9),$$
$$(4,4),(4,8),(5,5),(5,10),(6,6),(7,7),(8,8),(9,9),(10,10)\}$$

2. Να γίνει ο πίνακας της σχέσης.

R	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
3	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
4	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

|R|=27.

3. Να περιγραφεί η R^{-1} και να γραφεί ως σύνολο διατεταγμένων ζευγών.
R^{-1}: «ο β διαιρείται από τον α» ή «ο β είναι πολλαπλάσιο του α»

$$R^{-1} = \{(\beta,\alpha): \beta = \kappa\alpha, \kappa \in N, \alpha, \beta \in A\} \subseteq A^2$$
$$= \{(1,1),(2,1),\dots,(10,1),(2,2),(4,2),\dots,(10,2),(3,3),(6,3),(9,3),$$
$$(4,4),(8,4),(5,5),(10,5),(6,6),(7,7),(8,8),(9,9),(10,10)\}$$

4. Να εξεταστούν οι R και R^{-1} ως προς τις ιδιότητες.
Ανακλαστική: Είναι γιατί $(a,a) \in R$ και $(a,a) \in R^{-1}$, $\forall \alpha \in R$
Μη-ανακλαστική: Δεν είναι και οι δύο.
Συμμετρική: Δεν είναι και οι δύο.
Αντισυμμετρική: Είναι και οι δύο. Αν $(\alpha,\beta) \in R$ και $(\beta,\alpha) \in R$, τότε $\beta = \kappa\alpha$ και $\alpha = \lambda\beta$ από όπου προκύπτει ότι $\alpha = \kappa\lambda\alpha$ και άρα $\kappa = \lambda = 1$, οπότε και $\beta = \alpha$. Ομοίως για R^{-1}.
Μεταβατική: $\left.\begin{matrix}(\alpha,\beta) \in R \Rightarrow \beta = \kappa\alpha, \kappa \in N \\ (\beta,\gamma) \in R \Rightarrow \gamma = \lambda\beta, \lambda \in N\end{matrix}\right\} \Rightarrow \gamma = \kappa\lambda\alpha \Rightarrow \gamma = \mu\alpha, \mu \in N \Rightarrow (\alpha,\gamma) \in R$
Ομοίως για R^{-1}.

5. Να εξεταστεί αν οι R και R^{-1} είναι σχέσεις ισοδυναμίας.
Εφόσον και οι δύο δεν είναι συμμετρικές δεν είναι και σχέσεις ισοδυναμίας.

6. Να εξεταστεί αν R και R^{-1} είναι συναρτήσεις.

   R: $1 \to 1$, $1 \to 2$, …, $1 \to 10$

   R^{-1}: $10 \to 1$, $10 \to 2$, $10 \to 5$, $10 \to 10$

   Και οι δύο δεν είναι συναρτήσεις.

2. Σχέσεις (1.7.28)

Δίνεται το σύνολο B={0,1}.

1. Να βρεθούν όλες οι σχέσεις που είναι δυνατό να οριστούν στο B.
   Οποιαδήποτε σχέση θα είναι υποσύνολο του $B \times B = B^2$.

$$B^2 = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\} \quad |B^2| = |B|^2 = 4$$

   Το B^2 έχει συνολικά $P(B^2) = 2^4 = 16$ δυνατά υποσύνολα που καθορίζουν και το πλήθος των σχέσεων. Οι πίνακες των σχέσεων είναι οι εξής:

R	0	1
0	1	0
1	0	0

R	0	1
0	0	1
1	0	0

R	0	1
0	0	0
1	1	0

R	0	1
0	0	0
1	0	1

R	0	1
0	1	1
1	0	0

R	0	1
0	0	1
1	0	1

R	0	1
0	0	0
1	1	1

R	0	1
0	1	0
1	1	0

R	0	1
0	1	0
1	0	1

R	0	1
0	0	1
1	1	0

R	0	1
0	1	1
1	0	1

R	0	1
0	1	1
1	1	0

R	0	1
0	0	1
1	1	1

R	0	1
0	1	0
1	1	1

R	0	1
0	1	1
1	1	1

$= B^2$

R	0	1
0	0	0
1	0	0

$= \emptyset$

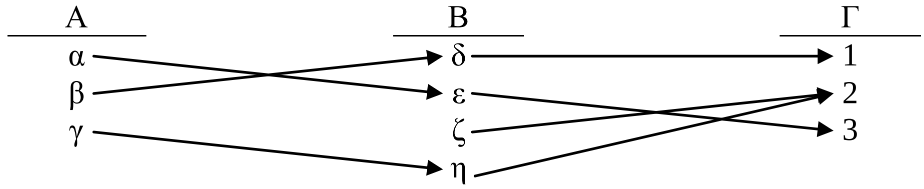
2. Ποιες είναι οι συναρτήσεις;
   Παρατηρώντας τους παραπάνω πίνακες θα πρέπει κάθε γραμμή να έχει ακριβώς ένα «1».
   Αυτές αναπαρίστανται από τους κοκκινισμένους πίνακες.
   {(0,1),(1,1)},{(0,0),(1,0)},{(0,0),(1,1)},{(0,1),(1,0)}

3. Σύνθεση Συναρτήσεων

Α={α,β,γ}   Β={δ,ε,ζ,η}   Γ={1,2,3}

$f: A \rightarrow B$

$g: B \rightarrow \Gamma$



1. Να ορισθεί η σύνθεση $(gof): A \rightarrow \Gamma$

$$(gof)(\alpha) = g\big(f(\alpha)\big) = g(\varepsilon) = 3$$
$$(gof)(\beta) = g\big(f(\beta)\big) = g(\delta) = 1$$
$$(gof)(\gamma) = g\big(f(\gamma)\big) = g(\eta) = 2$$

Με πίνακες:

f	δ	ε	ζ	η
α	0	1	0	0
β	1	0	0	0
γ	0	0	0	1

g	*1*	*2*	*3*
δ	1	0	0
ε	0	0	1
ζ	0	1	0
η	0	1	0

gof	1	2	3
α	0	0	1
β	1	0	0
γ	0	1	0

4. Συνάρτηση

Η συνάρτηση $g: Q \rightarrow Q$, όπου $g(x) = 5x - 1$ είναι επί.

Έστω $y \in Q$. Έστω ότι $x = \frac{y+1}{5}$. Αφού $y \in Q$ συνεπάγεται ότι και $x \in Q$. Άρα:

$$g(x) = g\left(\frac{y+1}{5}\right) = 5\left(\frac{y+1}{5}\right) - 1 = (y+1) - 1 = y$$

Επομένως, κάθε y του πεδίου τιμών είναι έξοδος του g και άρα η g είναι επί.

5. Κλάσεις Ισοδυναμίας (Wiley 4.5-10)

Έστω A={0,1,2,3,4,5,6} και $R = \{(x, y) \in A \times A: x - y\ διαιρείται\ από\ το\ 3\}$.

a. Αποδείξτε ότι η R είναι ανακλαστική.
Έστω $\alpha \in A$. Αφού $\alpha - \alpha = 0$ και το 0 διαιρείται από το 3, συνεπάγεται ότι $(\alpha, \alpha) \in R$.

b. Αποδείξτε ότι η R είναι συμμετρική.
Έστω $\alpha \in A$ και $\beta \in A$ έτσι ώστε $(\alpha, \beta) \in R$. Αυτό σημαίνει ότι $\alpha - \beta = 3\kappa$, για κάποιον ακέραιο κ. Επομένως, $\beta - \alpha = 3(-\kappa)$ και άρα και το $\beta - \alpha$ διαιρείται από το 3. Άρα $(\beta, \alpha) \in R$.

c. Αποδείξτε ότι η R είναι μεταβατική.
Έστω $\alpha, \beta, \gamma \in A$ έτσι ώστε $(\alpha, \beta) \in R$ και $(\beta, \gamma) \in R$. Αυτό σημαίνει ότι $\alpha - \beta = 3\kappa$ και $\beta - \gamma = 3\lambda$ για κάποιους ακέραιος κ, λ. Άρα:
$$\alpha - \gamma = (\alpha - \beta) + (\beta - \gamma) = 3\kappa + 3\lambda = 3(\kappa + \lambda)$$
Άρα το $\alpha - \gamma$ διαιρείται από το 3 και άρα το $(\alpha, \gamma) \in R$.

d. Ποιά είναι η διαμέριση του *A* βάση της σχέσης ισοδυναμίας *R*:
{{0,3,6},{1,4},{2,5}}

6. Κλάσεις Ισοδυναμίας (Wiley 4.5-10)

Έστω R μία σχέση στο A=N×N έτσι ώστε (x,y)R(p,q) αν και μόνο αν x+q=y+p. Να δείξετε ότι η R είναι σχέση ισοδυναμίας.

Η συγκεκριμένη σχέση είναι:
α)ανακλαστική: αφού $(x, y)R(x, y)$ σημαίνει ότι $x + y = y + x$ που ισχύει.
β)συμμετρική: αφού $(x, y)R(p, q)$ σημαίνει ότι $x + q = y + p$ που μπορεί να γραφεί σαν $y + p = x + q$ που σημαίνει $(p, q)R(x, y)$. Άρα $(x, y)R(p, q)$ δίνει $(p, q)R(x, y)$ και άρα η R είναι συμμετρική.
γ)μεταβατική: Έστω $(x, y)R(p, q)$ και $(p, q)R(a, b)$ το οποίο σημαίνει ότι $x + q = y + p$ και $p + b = q + a$. Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε $(x + q) + (p + b) = (y + p) + (q + a)$ από όπου προκύπτει ότι $(x + b) + (p + q) = (y + a) + (p + q)$ και αφαιρώντας το $(p + q)$ και από τα δύο μέλη παίρνουμε $x + b = y + a$ οπότε $(x, y)R(a, b)$
Άρα η *R* είναι σχέση ισοδυναμίας.

7. Συναρτήσεις

Έστω μία συνάρτηση *f:A→A* (η *f* είναι υποσύνολο του *A×A*). Να δείξετε ότι για κάθε συνάρτηση f_1 και f_2 που είναι υποσύνολα του *A×A* αν $f \circ f_1 = f \circ f_2$ τότε $f_1 = f_2$ ***αν και μόνο αν*** η *f* είναι ένα-προς-ένα.

Λύση:

Έστω ότι *f* δεν είναι ένα-προς-ένα. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν *α≠β∈A* έτσι ώστε *f(α)=f(β)*. Ορίζουμε τις συναρτήσεις $f_1: A \to A$, $f_1(x) = a$, για κάθε *x∈A* και $f_2: A \to A$, $f_2(x) = \beta$, για κάθε *x∈A*. Αν $f \circ f_1 = f \circ f_2$ τότε:

$$f \circ f_1(x) = f\big(f_1(x)\big) = f(a)$$

$$f \circ f_2(x) = f\big(f_2(x)\big) = f(\beta)$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι $f(a) = f(\beta)$ και γενικά $f \circ f_1 = f \circ f_2$ αλλά $\alpha \neq \beta$ και άρα $f_1 \neq f_2$.

Τώρα αποδεικνύουμε ότι αν $f \circ f_1 = f \circ f_2$ και $f_1 \neq f_2$ η f δεν είναι ένα-προς-ένα. Ας υποθέσουμε ότι οι f_1 και f_2 ορίζονται όπως και πριν. Έστω $x \in A$ έτσι ώστε $f_1(x) \neq f_2(x)$. Τότε:

$$f \circ f_1(x) = f\big(f_1(x)\big) = f(a)$$

$$f \circ f_2(x) = f\big(f_2(x)\big) = f(\beta)$$

και $f(a) = f(\beta)$ ενώ $\alpha = f_1(x) \neq f_2(x) = \beta$ και επομένως η f δεν είναι ένα-προς-ένα.

Άλυτες Ασκήσεις

1. (Wiley 4.1-10) Αποφασίστε ποιες από τις παρακάτω σχέσεις είναι συναρτήσεις και γιατί.
    a. Η σχέση R={(1,5),(2,3),(3,3),(4,2),(5,1)} στο $A \times A$, όπου A={1,2,3,4,5}.
    b. Για A={1,2,3,4,5}, η σχέση R={(1,5),(2,3),(3,3),(1,2),(4,1)} στο $A \times A$.
    c. Η σχέση R στο $Q \times Z$, όπου $(r, z) \in R$ δηλώνει αν μπορεί ο ρητός αριθμός r να γραφεί σαν κλάσμα με αριθμητή z.

2. (Wiley 4.2-10) Έστω ότι **B** είναι το σύνολο των δυαδικών ακολουθιών μήκους 5. Ορίζουμε την συνάρτηση $f: B \to \{0,1,2,3,4,5\}$, όπου *f(s)* είναι το πλήθος των 1 στην δυαδική ακολουθία s. Ορίζουμε την συνάρτηση $g: \{0,1,2,3,4,5\} \to B$, όπου *g(n)* είναι η δυαδική ακολουθία που αποτελείται από *n* 1 ακολουθούμενα από 5-*n* 0.
    a. Υπολογίστε τα *f*(11011), *f*(01101) και *f*(11000). Είναι η *f* αντιστρέψιμη; Αν όχι γιατί;
    b. Υπολογίστε τα g(0), g(2) και g(4). Είναι η g αντιστρέψιμη; Αν όχι γιατί;
    c. Υπολογίστε τα $(fog)(2)$, $(fog)(0)$, $(gof)(11010)$ και $(gof)(11100)$.
    d. Είναι οι *f* και g αντίστροφες η μία της άλλης;

3. (Wiley 4.3 Prop. 2) Αν η $f: A \to B$ είναι ένα-προς-ένα και η $g: B \to C$ είναι ένα-προς-ένα τότε και η σύνθετη συνάρτηση $gof: A \to C$ είναι ένα προς ένα.

4. (Wiley 4.3-5) Έστω ότι S={a,b,c} και η συνάρτηση $c: P(S) \to P(S)$ όπου $c(A) = S - A$.
    a. Είναι η c ένα-προς-ένα;
    b. Είναι η c επί;
    c. Είναι η c αντιστρέψιμη και αν ναι ποια είναι η c^{-1}; Αν όχι γιατί;