ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ «ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ» - 15/9/2016

Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες και 30 λεπτά

1. (30 μονάδες)

α) (13) Έστω G ένα διμερές γράφημα στο οποίο όλες οι κορυφές έχουν τον ίδιο βαθμό $k \geq 2$.

1. (5) Δείξτε ότι τα δύο σύνολα κορυφών του G έχουν ίδιο πληθάριθμο (κάθε σύνολο ορίζεται από όλες τις κορυφές μεταξύ των οποίων δεν υπάρχει καμία ακμή).

2. (8) Δείξτε ότι στο G δεν μπορεί να υπάρχει γέφυρα. Γέφυρα είναι μία ακμή της οποίας η διαγραφή από το συνεκτικό υπογράφημα μετατρέπει το γράφημα σε μη-συνεκτικό διαχωρίζοντάς το σε δύο συνεκτικές συνιστώσες.

β) (7) Δείξτε ότι αν σε ένα δένδρο με <u>τουλάχιστον</u> 4 κορυφές προσθέσουμε 3 οποιεσδήποτε ακμές, το προκύπτον γράφημα είναι επίπεδο. Δείξτε ότι το ίδιο δεν ισχύει αν προσθέσουμε 4 ακμές (δώστε ένα αντιπαράδειγμα σε αυτή τη περίπτωση).

γ) (10) Να δείξετε ότι η συνδεσιμότητα μεταξύ δύο κορυφών $\boldsymbol{x}$ και $\boldsymbol{y}$ ενός απλού μη-κατευθυνόμενου γραφήματος $\boldsymbol{G=(V,E)}$ είναι σχέση ισοδυναμίας. Δηλαδή, αν αναπαραστήσουμε τη σχέση της συνδεσιμότητας με $\boldsymbol{C}$, τότε γράφουμε $\boldsymbol{(x, y) \in C}$ αν υπάρχει μονοπάτι από τον $\boldsymbol{x}$ στον κόμβο $\boldsymbol{y}$. Να χαρακτηρίσετε τις κλάσεις ισοδυναμίας.

2. (20 μονάδες)

α) (10) Μας δίνονται τρία κουτιά. Το ένα κουτί περιέχει χρυσό ενώ τα άλλα δύο είναι άδεια. Κάθε κουτί έχει μία επιγραφή πάνω του που δίνει κάποια στοιχεία για τα περιεχόμενά του. Οι επιγραφές αυτές είναι:

Κουτί 1: «Ο χρυσός δεν είναι εδώ»

Κουτί 2: «Ο χρυσός δεν είναι εδώ»

Κουτί 3: «Ο χρυσός είναι στο κουτί 2»

Ξέρουμε ότι μόνο μία επιγραφή είναι αληθής ενώ οι άλλες δύο είναι ψευδείς (απλά δεν ξέρουμε ποιες είναι αυτές). Ποιο κουτί έχει το χρυσό;

Εκφράστε το πρόβλημα με τη χρήση προτασιακού λογισμού και βρείτε τη λύση με τη χρήση πίνακα αληθείας. (Υπόδειξη: Έστω ότι $B_i, i \in \{1,2,3\}$ είναι η λογική πρόταση «ο χρυσός είναι στο κουτί i». Εκφράστε την πληροφορία που έχετε για το πρόβλημα σε σχέση με τα B_i)

β) (10) Μετατρέψτε τις ακόλουθες προτάσεις σε λογικές προτάσεις και χρησιμοποιήστε κανόνες εξαγωγής συμπερασμάτων για να παράγετε το συμπέρασμα. Να αναγράφετε ποιον κανόνα χρησιμοποιείτε κάθε φορά.

1. Όλοι οι φοιτητές στο Α.Π.Θ. διαβάζουν πολύ.
2. Υπάρχει ένας φοιτητής στο Α.Π.Θ. που παίζει pes.
3. Αν ένας φοιτητής παίζει pes, τότε ο φοιτητής περνάει ωραία.
4. Αν ένας φοιτητής διαβάζει πολύ και περνάει ωραία, τότε ο φοιτητής είναι ευτυχισμένος.

<u>**Συμπέρασμα:**</u> Κάποιος φοιτητής στο Α.Π.Θ. είναι ευτυχισμένος.

3. (40 μονάδες)

α) (20) Μία πιτσαρία κάνει την εξής διαφήμιση:

Αγοράστε 2 μεγάλες πίτσες στην κανονική τιμή και για κάθε πίτσα μπορείτε να βάλετε μέχρι 10 επιπλέον υλικά από 10 διαφορετικά δυνατά υλικά εντελώς δωρεάν. Υπάρχουν συνολικά 1,048,576 τρόποι να φτιάξετε την παραγγελία σας.

Αυτός που έκανε τη διαφήμιση ήταν απόφοιτος του τμήματος Πληροφορικής του Α.Π.Θ. που βρήκε ότι $(2^{10})^2$=1,048,576. Βρήκε αυτόν τον αριθμό σκεφτόμενος ότι το πλήθος επιλογής υλικών για μία πίτσα είναι όλα τα δυνατά υποσύνολα των 10 υλικών, που είναι 2^{10}. Μιας και είναι 2 οι πίτσες το πλήθος των συνολικών συνδυασμών πίτσας είναι $(2^{10})^2$.
Δυστυχώς αυτός ο αριθμός είναι ΛΑΘΟΣ.

1. Εξηγήστε ποιο είναι το λάθος που έκανε στην μέτρηση ο απόφοιτος.
2. Με πόσους τρόπους μπορεί κάποιος να επιλέξει υλικά για 2 πίτσες;
3. Με πόσους τρόπους μπορείτε να επιλέξετε υλικά για n πίτσες;

(δεν χρειάζεται να κάνετε αριθμητικές πράξεις)
β) (5) Να δείξετε ότι για οποιεσδήποτε 5 κορυφές ενός κύβου, η γραμμή διαμέσου δύο εξ αυτών τέμνει το κέντρο του κύβου.
γ) (4) Πόσοι τρόποι υπάρχουν να επιλέξουμε 10 αναψυκτικά από τρεις τύπους αναψυκτικών: σόδα, πορτοκαλάδα και λεμονάδα, όπου τουλάχιστον 5 θα πρέπει να είναι λεμονάδες;
δ) (2,5) Πόσοι είναι οι τρόποι επιλογής 5 ατόμων από ένα δωμάτιο 13 ατόμων όταν δεν μας ενδιαφέρει η σειρά αλλά καθορίζουμε στο τέλος εμείς ποιος από τους 5 θα είναι ο αρχηγός;
ε) (2,5) Ποιο είναι το πλήθος διευθετήσεων m διαφορετικών σφαιρών σε n διαφορετικούς κάδους;
στ) (3) Ποιο είναι το πλήθος ακολουθιών από j ίδιες μαύρες σφαίρες και i-1 ίδιες λευκές σφαίρες;
ζ) (3) Ποιος ο αριθμός των διαφορετικών μονοπατιών που μπορεί να ακολουθήσει ένας πύργος (κινείται μόνο οριζόντια και κάθετα) για να κινηθεί από το βορειοανατολικότερο στο νοτιοδυτικότερο σημείο μίας σκακιέρας 10×10 (100 κελιά συνολικά) όταν επιτρέπουμε να κινείται μόνο προς την δύση και το νότο;

4. (15 μονάδες)
α) (10) Να υπολογίσετε τον κλειστό τύπο για το εξής άθροισμα: $S_n = \sum_{k=0}^{n} k^2 2^k$, αν σας δίνεται ότι $\sum_{i=0}^{n} i2^i = (n-1)2^{n+1} + 2$.
β) (5) Να υπολογίσετε τον κλειστό τύπο για το γινόμενο $P_n = \prod_{i=1}^{n} 2 \cdot 4^i$.

5. (10 μονάδες) Να αποδειχθεί ότι αν ο n είναι ακέραιος και ο n^3+5 είναι περιττός, τότε ο n είναι άρτιος χρησιμοποιώντας και τους δύο τρόπους απόδειξης: α) έμμεση απόδειξη (αντιθετοαντίστροφο) και β) απόδειξη με αντίφαση.

6. (10 μονάδες) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί.

Καλή Επιτυχία!!!

<u>Λύσεις</u>

(Οι λύσεις είναι ενδεικτικές)

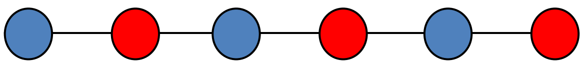
1.

α) 1. Έστω X και Y τα δύο σύνολα κορυφών του G. Ο αριθμός των ακμών που προσπίπτουν στο X είναι $k|X|$ και αντιστοίχως για το Y είναι $k|Y|$. Θα πρέπει $k|X| = k|Y|$ από όπου προκύπτει ότι $|X| = |Y|$.

2. Έστω ότι υπάρχει μία γέφυρα e σε κάποια συνιστώσα H του γραφήματος (προσέξτε ότι το διμερές γράφημα μπορεί να έχει παραπάνω από μία συνιστώσες μιας και δεν αναφέρουμε ότι είναι συνεκτικό). Αφαιρώντας την e παίρνουμε δύο συνεκτικές συνιστώσες H_1 και H_2 από την H αφού η e είναι γέφυρα. Κάθε μία από αυτές τις συνεκτικές συνιστώσες είναι με τη σειρά της διμερές γράφημα. Ας εξετάσουμε την H_1. Έστω ότι τα δύο σύνολα κορυφών για την H_1 θα είναι τα A και B. Όλες οι κορυφές της H_1 θα έχουν βαθμό k εκτός από τη μία κορυφή (έστω ότι ανήκει στο σύνολο A) που αποτελούσε άκρο της e (η άλλη θα ανήκει στην H_2) και θα έχει βαθμό k-1 μετά την αφαίρεση της e. Άρα ακολουθώντας το σκεπτικό του υποερωτήματος (α) έχουμε ότι: $k|A| - 1 = k|B| \Rightarrow k(|A| - |B|) = 1$, όπου σημαίνει ότι οι ποσότητες k και $|A| - |B|$ θα πρέπει να είναι αναγκαστικά 1 αφού είναι φυσικοί αριθμοί. Όμως $k \geq 2$, και άρα προέκυψε άτοπο. Επομένως, δεν μπορεί να υπάρχει γέφυρα e σε τέτοιο γράφημα.

β) Έστω ότι υπάρχει δένδρο T με 4 κορυφές όπου αν συνδέσουμε τρία ζεύγη κορυφών μεταξύ τους τότε το γράφημα που προκύπτει είναι μη επίπεδο. Από το θεώρημα Kuratowski αυτό σημαίνει ότι το γράφημα αυτό περιέχει υπογράφημα ομομορφικό του K_5 ή του $K_{3,3}$. Αν όμως αφαιρέσουμε τις τρεις ακμές που προσθέσαμε τότε προκύπτει το αρχικό δένδρο. Είναι αδύνατο όμως να καταστραφούν όλοι οι κύκλοι του K_5 ή του $K_{3,3}$ με τρεις αφαιρέσεις ακμών. Άρα το γράφημα δεν περιέχει υπογράφημα ομομορφικό του K_5 ή του $K_{3,3}$ και άρα δεν μπορεί να είναι μη-επίπεδο.

Αν προσθέσουμε 4 ακμές τότε το γράφημα που προκύπτει μπορεί να είναι μη-επίπεδο. Έστω το μονοπάτι 6 κορυφών όπως φαίνεται και στο σχήμα (είναι δένδρο).



Αν προσθέσουμε 4 ακμές μπορούμε να πάρουμε το $K_{3,3}$ (ο πρώτος με τον τέταρτο και τον έκτο, ο τρίτος με τον έκτο και ο πέμπτος με τον δεύτερο).

γ. Αρκεί να δείξουμε τις τρεις ιδιότητες.

Ανακλαστική: Ισχύει (x,x) $\in$ C αφού ο κόμβος x συνδέεται με τον εαυτό του με ένα τετριμμένο τρόπο.

Συμμετρική: Είναι αφού αν (x,y) $\in$ C και με δεδομένο ότι το γράφημα είναι μη κατευθυνόμενο θα ισχύει (y,x) $\in$ C απλά σαρώνοντας το μονοπάτι προς την αντίθετη κατεύθυνση.

Μεταβατική: Έστω (x,y) $\in$ C και (y,z) $\in$ C. Τότε, θα υπάρχει μονοπάτι από τον x στον y και από τον y στον z. Συνδέοντας αυτά τα δύο μονοπάτια βγάζουμε το συμπέρασμα ότι υπάρχει μονοπάτι από τον x στον z και άρα (x,z) $\in$ C.

Επομένως η συνδεσιμότητα είναι σχέση ισοδυναμίας. Οι κλάσεις ισοδυναμίας αντιστοιχούν στις συνδεδεμένες συνιστώσες του γραφήματος.

2.

α) Έχουμε δύο βασικές προτάσεις που μπορούμε να αναπαραστήσουμε κάνοντας χρήση των B_i.

«Ένα κουτί περιέχει το χρυσό και τα άλλα δύο κουτιά είναι άδεια»

$$C = (B_1 \land \neg B_2 \land \neg B_3) \lor (\neg B_1 \land B_2 \land \neg B_3) \lor (\neg B_1 \land \neg B_2 \land B_3)$$

«Μόνο μία επιγραφή είναι αληθής ενώ οι άλλες δυο είναι ψευδείς»

$$D = (\neg B_1 \wedge \neg\neg B_2 \wedge \neg B_2) \vee (\neg\neg B_1 \wedge \neg B_2 \wedge \neg B_2) \vee (\neg\neg B_1 \wedge \neg\neg B_2 \wedge B_2) \equiv (B_1 \wedge \neg B_2) \vee (B_1 \wedge B_2)$$

Φτιάχνουμε τον πίνακα αληθείας για τα C και D

B_1	B_2	B_3	C	D
T	T	T	Ψ	T
T	T	Ψ	Ψ	T
T	Ψ	T	Ψ	T
T	Ψ	Ψ	T	T
Ψ	T	T	Ψ	Ψ
Ψ	T	Ψ	T	Ψ
Ψ	Ψ	T	T	Ψ
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ

Η μόνη περίπτωση όπου και οι δύο προτάσεις είναι αληθείς είναι όταν $B_1 = T, B_2 = \Psi, B_3 = \Psi.$ Αυτό σημαίνει ότι το πρώτο κουτί περιέχει το χρυσό.

β) Ο τομέας αναφοράς είναι το σύνολο των φοιτητών στο Α.Π.Θ. Έστω οι παρακάτω δηλώσεις:

$P(x)$: «Ο x διαβάζει πολύ»

$Q(x)$: «Ο x παίζει pes»

$R(x)$: «Ο x περνάει ωραία»

$S(x)$: «Ο x είναι ευτυχισμένος»

Οι προτάσεις γίνονται ως εξής:

1. $\forall x P(x)$
2. $\exists x Q(x)$
3. $\forall x \big(Q(x) \rightarrow R(x)\big)$
4. $\forall x \Big(\big(P(x) \wedge R(x)\big) \rightarrow S(x)\Big)$

Το συμπέρασμα γράφεται ως $\exists x S(x)$

5. $Q(\alpha)$ Υπαρξιακή αμεσότητα από (2)
6. $R(a)$ από Καθολικό Modus Ponens (3) και (5)
7. $P(a)$ Καθολική αμεσότητα από (1)
8. $S(a)$ Καθολικό Modus Ponens από (7),(6) και (4)
9. $\exists x S(x)$ Υπαρξιακή Γενίκευση από (8)

3.

α) 1. Ο τρόπος επιλογής υλικών για μία πίτσα είναι πράγματι 2^{10}. Όμως, όταν λέει ότι υπάρχουν $(2^{10})^2$ διαφορετικοί τρόποι για 2 πίτσες κάνει το λάθος να λαμβάνει υπόψη τη σειρά με την οποία εμφανίζονται οι πίτσες που προφανώς δεν έχει κανένα νόημα (μία με ένα τυρί και μία με δύο τυριά δεν είναι διαφορετική παραγγελία από μία με δύο τυριά και μία με ένα τυρί).

2. Η σωστή λύση είναι:

$$2^{10} + \binom{2^{10}}{2} = 524{,}800$$

Δηλαδή, οι τρόποι να επιλέξουμε τα υλικά για 2 ίδιες πίτσες συν το πλήθος των τρόπων επιλογής από 2 πίτσες με διαφορετικά υλικά. Προσοχή, δεν είναι $(2^{10})^2/2$ αφού σε αυτή τη περίπτωση διαιρούμε και τις 2^{10}

πίτσες με το 2 που είναι ίδιες μεταξύ τους. Πιο απλά είναι μία επιλογή από 2 πίτσες από συνολικά 2^{10}. Δηλαδή:

$$\binom{2^{10}+2-1}{2} = \binom{2^{10}+1}{2}$$

Οι δύο παραπάνω τύποι είναι ισοδύναμοι μεταξύ τους.

3. Στην ουσία είναι μία n επιλογή από 2^{10} συνολικά διαφορετικέ πίτσες. Επομένως:

$$\binom{2^{10}+n-1}{n}$$

β) Φτιάχνουμε τέσσερα ζεύγη από αντίθετες κορυφές (από τις 8 συνολικά) του κύβου ώστε οι γραμμές που περνούν από αυτές να διέρχονται από το κέντρο του κύβου. Από την αρχή του περιστερώνα, οποιοδήποτε σύνολο 5 κορυφών θα περιέχει ένα τέτοιο ζεύγος. Αποδείχτηκε.

γ) Αυτό είναι ισοδύναμο με το να επιλέξουμε 5 αναψυκτικά από τρεις τύπους αφού τα υπόλοιπα 5 θα πρέπει να είναι λεμονάδες. Αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{7}{5}$ τρόπους.

δ) $5\binom{13}{5}$ κανόνας γινομένου και συνδυασμοί

ε) Κάθε μία σφαίρα μπορεί να μπει σε *n* διαφορετικούς κάδους. Για *m* σφαίρες άρα έχουμε n^m.

στ) Το πρόβλημα μπορούμε να το δούμε σαν i-1 άσσους και j 0 από τα οποία πρέπει να φτιάξουμε μία δυαδική ακολουθία. Αυτό ισοδυναμεί όμως με το να επιλέξουμε τις θέσεις για τα j 0 σε σύνολο $i-1+j$ θέσεων. Επομένως, το πλήθος είναι $C(i-1+j, j)$.

ζ) Ας συμβολίσουμε με 0 μία κίνηση του πύργου προς την δύση και με 1 μία κίνηση του πύργου προς το νότο. Τότε ο αριθμός των ζητούμενων μονοπατιών είναι ίσος με τον πλήθος των τρόπων τοποθέτησης 9 μηδενικών και 9 μονάδων σε σειρά (εφόσον ο πύργος θα κινηθεί αναγκαστικά 9 τετράγωνα δυτικά και 9 τετράγωνα νότια). Ο αριθμός αυτός είναι $\binom{18}{9}$.

4.

α. Από εξίσωση αθροίσματος έχουμε:

$$S_n + (n+1)^2 2^{n+1} = 0 + \sum_{i=0}^{n} (i+1)^2 2^{i+1} \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 2^{n+1} = 2\sum_{i=0}^{n} (i^2+2i+1) 2^{i} \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 2^{n+1} = 2\sum_{i=0}^{n} i^2 2^i + 4\sum_{i=0}^{n} i2^i + 2\sum_{i=0}^{n} 2^i \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 2^{n+1} = 2S_n + 4\left((n-1)2^{n+1}+2\right) + 2(2^{n+1}-1) \Rightarrow$$

$$S_n = (n+1)^2 2^{n+1} - 4\left((n-1)2^{n+1}+2\right) - 2(2^{n+1}-1)$$

β.

$$\log_2 P_n = \log_2 \prod_{i=1}^{n} 2 \cdot 4^i = \sum_{i=1}^{n} \log_2(2 \cdot 4^i) = \sum_{i=1}^{n} (\log_2 2 + \log_2 4^i) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} (1 + 2i) = n + n(n+1) = n(n+2)$$

Άρα: $P_n = 2^{n(n+2)}$

5.

(έμμεση απόδειξη) Έστω n περιττός. Τότε μπορούμε να τον γράψουμε σαν $n=2k+1$, για κάποιον ακέραιο k. Άρα $n^3+5= (2k+1)^3+5=8k^3+12k^2+6k+1+5=2(4k^3+6k^2+3k+3)$. Άρα ο n^3+5 είναι άρτιος.

(με αντίφαση) Έστω n περιττός. Τότε και το n^3 θα είναι περιττός αριθμός αφού το γινόμενο περιττών αριθμών δίνει περιττό αριθμό. Όμως η διαφορά δύο περιττών αριθμών είναι άρτιος. Όμως $(n^3+5)- n^3=5$ δεν είναι άρτιος αλλά περιττός. Άρα η υπόθεση που κάναμε ότι ο n είναι περιττός οδηγεί σε αντίφαση και άρα ο n είναι άρτιος.

6.

Rosen: Σελ. 274, Απόδειξη θεωρήματος 4.