ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ Ι

Αρίθμηση

- ***Αρίθμηση*** (counting): διαδικασία εύρεσης του αριθμού των στοιχείων ενός πεπερασμένου συνόλου
- Μικρά σε πλήθος σύνολα: καταμέτρηση στοιχείων ένα προς ένα
- Στην καθημερινή πρακτική: καταμέτρηση αδύνατη (π.χ. τυχερά παιχνίδια, σκάκι, προγραμματισμός ενεργειών, κλπ)

Παραδείγματα στην πληροφορική

- Η πολυπλοκότητα και η αποδοτικότητα των αλγορίθμων εκτιμάται από τον αριθμό συγκεκριμένων διαδικασιών που εκτελούνται
- Ο σχεδιασμός κυκλωμάτων απαιτεί αρίθμηση των δυνατών περιπτώσεων δεδομένων – αποτελεσμάτων
- Η διαχείριση των δεδομένων εξαρτάται άμεσα από την αρίθμηση τους

Άλλα Παραδείγματα

- Θεωρία Γραφημάτων – Πλήθος ζευγαριών
- Πόσες διαφορετικές θέσεις υπάρχουν στον κύβο του Rubik?
- Πόσα διαφορετικά παιχνίδια σκάκι μπορούν να γίνουν?
- Υπολογισμός πιθανοτήτων για γεγονότα

Μαθηματικές τεχνικές

- ***Συνδυαστική ανάλυση*** (combinatorics):

  Μαθηματική περιοχή που ασχολείται με τη

  διάταξη, την επιλογή και τις πράξεις

  στοιχείων πεπερασμένων συνόλων

Για να πάρετε μία ιδέα…

2048013538550296444803 8	3171004832173501394113017	5763257331083479647409398	8247331000042995311646021
489445991866915676240992	3208234421597368647019265	5800949123548989122628663	8496243997123475922766310
1082662032430379651370981	3437254656355157864869113	6042900801199280218026001	8518399140676002660747477
1178480894769706178994993	3574883393058653923711365	6116171789137737896701405	8543691283470191452333763
1253127351683239693851327	3644909946040480189969149	6144868973001582369723512	8675309258374137092461352
1301505129234077811069011	3790044132737084094417246	6247314593851169234746152	8694321112363996867296665
1311567111143866433882194	3870332127437971355322815	6814428944266874963488274	8772321203608477245851154
1470029452721203587686214	4080505804577801451363100	6870852945543886849147881	8791422161722582546341091
1578271047286257499433886	4167283461025702348124920	6914955508120950093732397	9062628024592126283973285
1638243921852176243192354	4235996831123777788211249	6949632451365987152423541	9137845566925526349897794
1763580219131985963102365	4670939445749439042111220	7128211143613619828415650	9153762966803189291934419
1826227795601842231029694	4815379351865384279613427	7173920083651862307925394	9270880194077636406984249
1843971862675102037201420	4837052948212922604442190	7215654874211755676220587	9324301480722103490379204
2396951193722134526177237	5106389423855018550671530	7256932847164391040233050	9436090832146695147140581
2781394568268599801096354	5142368192004769218069910	7332822657075235431620317	9475308159734538249013238
2796605196713610405408019	5181234096130144084041856	7426441829541573444964139	9492376623917486974923202
2931016394761975263190347	5198267398125617994391348	7632198126531809327186321	9511972558779880288252979
2933458058294405155197296	5317592940316231219758372	7712154432211912882310511	9602413424619187112552264
3075514410490975920315348	5384358126771794128356947	7858918664240262356610010	9631217114906129219461111
3111474985252793452860017	5439211712248901995423441	7898156786763212963178679	9908189853102753335981319
3145621587936120118438701	5610379826092838192760458	8147591017037573337848616	9913237476341764299813987
3148901255628881103198549	5632317555465228677676044	8149436716871371161932035	
3157693105325111284321993	5692168374637019617423712	8176063831682536571306791	

- Μπορείτε να βρείτε δύο υποσύνολα των συγκεκριμένων 90 αριθμών με 25 ψηφία έτσι ώστε το άθροισμα των στοιχείων τους να είναι ίσο;
  - Αν υπάρχει μπορούμε να το επαληθεύσουμε αλλά δεν μπορούμε να το βρούμε …
  - **50 Ευρώ σε όποιον το καταφέρει μέχρι τις εξετάσεις…**

Ένα Κόλπο με Τράπουλα

Ένας μάγος με τον βοηθό του κάνουν το εξής κόλπο στο κοινό:

- Ο βοηθός δίνει μία τράπουλα (52 φύλλα) σε κάποιον από το κοινό για να επιλέξει με τυχαίο τρόπο (6,5,4).
- Ο βοηθός έπειτα θα δείξει τα (5,4,3) από τα (6,5,4) φύλλα και ο μάγος θα βρει το (6^o,5^o,4^o)

- Σε ποιες περιπτώσεις είναι μαγεία και σε ποιες αριθμητική; Τι κάνει ο βοηθός;

Βασικές αρχές συνδυαστικής

- ***Πεπερασμένο*** (finite) σύνολο S: αν υπάρχει αριθμός $n \in \mathbf{N}$ τέτοιος ώστε να είναι δυνατός ο ορισμός συνάρτησης f ένα προς ένα και επί από το σύνολο $\{1,2,\ldots,n\}$ στο σύνολο S
- ***Πληθικός αριθμός*** (cardinality) του S: Ο αριθμός n
- Συμβολισμός:

$$|S| = n$$

- "το S είναι ένα ***n-σύνολο***"

Η Αρχή της Αντιστοιχίας

- Αν δύο πεπερασμένα σύνολα μπορούν να αντιστοιχηθούν με μία συνάρτηση 1-1 και επί τότε τα σύνολα έχουν ίδιο μέγεθος.

Μία από τις πιο σημαντικές μαθηματικές ιδέες όλων των εποχών!

Αντιστοίχηση άγνωστου προβλήματος αρίθμησης σε γνωστό και μέτρηση

Παράδειγμα

A = επιλογή 12 ντόνατς από 5 είδη
B = ακολουθίες 16 bits με τέσσερις 1

00	1	1	00000	1	000	1	00
2	0		5		3		2
Σοκ.	Φρ.		Βερ.		Μήλο		Πορτ.

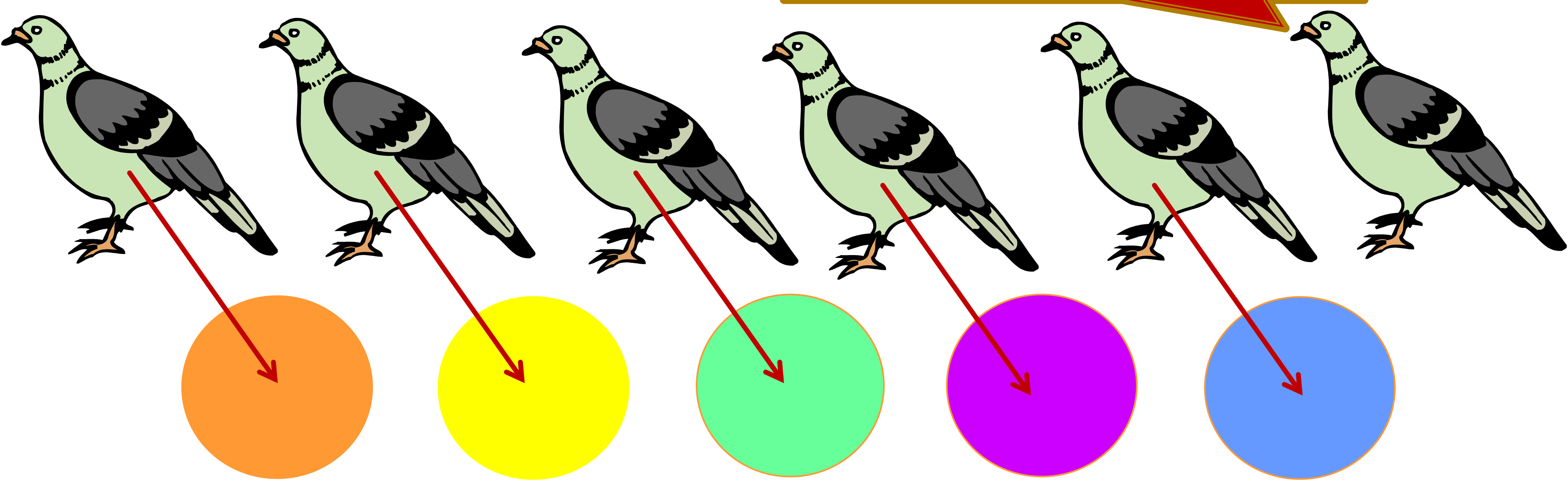
Με τέσσερις 1 χωρίζουμε τα 0 μεταξύ τους. Άρα B.

Η Αρχή των Περιστερώνων

- Αν βάλετε 6 περιστέρια σε 5 περιστερώνες τότε τουλάχιστον ένας περιστερώνας θα περιέχει παραπάνω από 1 περιστέρι

Γουάου – Τι είπες ρε φίλε!!!!

Ή απλά θα ζήσει ελεύθερο!!!



Πρόβλημα 1

- 15 τουρίστες προσπαθούν να ανέβουν τα Μετέωρα. Ο μεγαλύτερος είναι 33 και ο νεότερος είναι 20. Να δείξετε ότι 2 τουρίστες τουλάχιστον έχουν ίδια ηλικία.

Πρόβλημα 2

-1	1	1	1	1	-1
1	-1	1	1	-1	1
1	1	-1	-1	1	1
1	1	-1	-1	1	1
1	-1	1	1	-1	1
-1	-1	1	1	1	-1

- Ο μάγος είπε στην Αλίκη ότι θα την βοηθήσει να πάει σπίτι αν μπορούσε να φτιάξει ένα μαγικό 6x6 τετράγωνο με κελιά με τιμές “+1” ή “-1”, έτσι ώστε όλες οι κάθετες, οριζόντιες και διαγώνιες να έχουν διαφορετικό άθροισμα.
- Αποδείξτε ότι ο μάγος δεν θα βοηθήσει την Αλίκη αφού δεν υπάρχει τέτοιο τετράγωνο.

Πρόβλημα 3

- Υπάρχουν 380 φοιτητές στη σχολή μαγείας.
- Αποδείξτε ότι υπάρχουν τουλάχιστον δύο φοιτητές που έχουν ίδια γενέθλια.

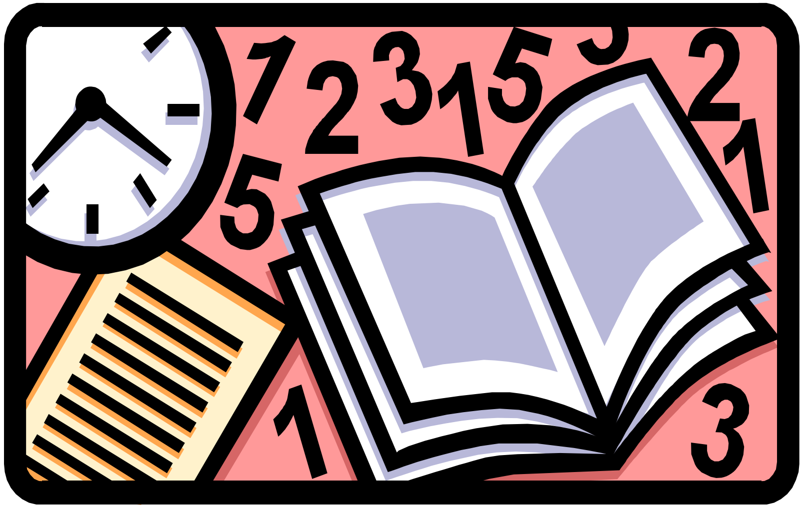
Πρόβλημα 4

- 65 φοιτητές έγραψαν τρία διαγωνίσματα. Οι πιθανοί βαθμοί είναι: A, B, C και D.
- Αποδείξτε ότι υπάρχουν τουλάχιστον δύο φοιτητές που έγραψαν ίδιους βαθμούς και στα τρία διαγωνίσματα.

Πρόβλημα 5

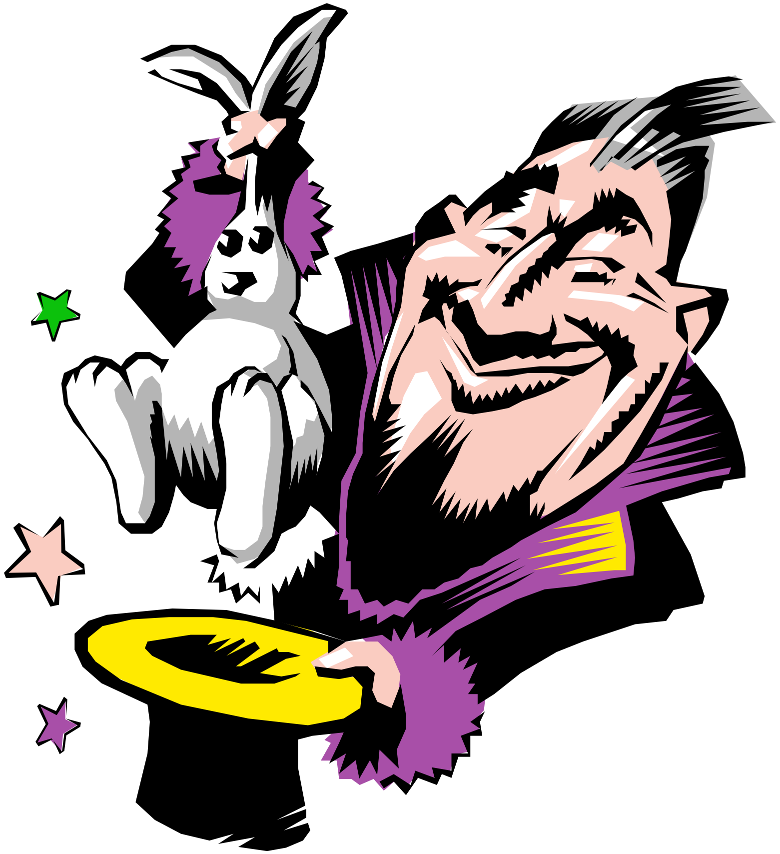
- Ο ωκεανός καλύπτει περισσότερη από τη μισή επιφάνεια της γης. Μπορείτε να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα ζευγάρι αντιδιαμετρικών σημείων ώστε και τα δύο να είναι στον ωκεανό;

Πρόβλημα 6



- Ένας μαθητής επιλέγει 52 φυσικούς αριθμούς. Αποδείξτε ότι μπορούμε να επιλέξουμε δύο αριθμούς από αυτή τη λίστα έτσι ώστε είτε το άθροισμά τους ή η διαφορά τους να διαιρείται από το 100.

Πρόβλημα 7



- Ο Γιάννης έχει 30 κάλτσες σε ένα κουτί: 10 άσπρες, 10 κόκκινες και 10 μαύρες. Πόσες κάλτσες πρέπει να τραβήξει τουλάχιστον χωρίς να κοιτάζει ώστε:

1) Δύο κάλτσες να έχουν το ίδιο χρώμα
2) Να τραβήξει δύο μαύρες κάλτσες
3) Δύο διαφορετικές κάλτσες

Γενικευμένη Αρχή Περιστερώνων

- Αν N αντικείμενα τοποθετηθούν σε k κουτιά, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα κουτί που περιέχει τουλάχιστον $\lceil N/k \rceil$ αντικείμενα
- Παράδειγμα:
  - Μεταξύ 100 ανθρώπων υπάρχουν τουλάχιστον $\lceil 100/12 \rceil = 9$ που γεννήθηκαν τον ίδιο μήνα.
  - Ποιός είναι ο ελάχιστος αριθμός φοιτητών σε μία τάξη έτσι ώστε να είμαστε σίγουροι ότι τουλάχιστον 6 θα πάρουν τον ίδιο βαθμό (5 επιλογές βαθμού:A,B,C,D,F)
    - Μικρότερος ακέραιος N ώστε $\lceil N/5 \rceil = 6$, $5*5+1 = 26$

Αρχή του Γινομένου

Αρχή του γινομένου (rule of product): Αν S και T είναι σύνολα τέτοια ώστε:

$$|S| = m, \quad |T| = n,$$

τότε ισχύει:

$$|S \times T| = m \cdot n$$

Γενίκευση

Γενίκευση: Αν $|B_i| = m_i, \ i = 1,2,\ldots,k$

τότε

$$|B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_k| = m_1 \cdot m_2 \cdot \cdots \cdot m_k$$

$$= \prod_{i=1}^{k} m_i$$

Αν $B_1 = \cdots = B_k = B$, τότε $\left|B^k\right| = |B|^k$

Παράδειγμα

Πόσοι αριθμοί μεταξύ 100 και 1000 έχουν τρία διαφορετικά περιττά ψηφία (π.χ. 153 ναι, 133 όχι).

Για το πρώτο ψηφίο έχουμε 5 επιλογές από {1,3,5,7,9}. Για το δεύτερο έχουμε 4 επιλογές από το σύνολο {1,3,5,7,9} με αφαίρεση της 1ης επιλογής. Αντίστοιχα για το τρίτο ψηφίο έχουμε 3. Άρα: $5 \times 4 \times 3 = 60$ αριθμοί

Αρχή του Αθροίσματος

Αρχή του αθροίσματος (rule of sum):

Αν S και T είναι σύνολα τέτοια ώστε:

$$|S| = m, \qquad |T| = n, \qquad \text{και} \qquad S \cap T = \varnothing,$$

τότε ισχύει:

$$|S \cup T| = m + n$$

Γενίκευση

Γενίκευση:

Αν τα σύνολα $A_1, A_2, \ldots, A_k$ αποτελούν διαμέριση του συνόλου M και $|A_i| = m_i$, $i = 1,2,\ldots,k$, τότε ισχύει

$$|M| = \sum_{i=1}^{k} m_i .$$

Παράδειγμα

Με πόσους τρόπους μπορεί κάποιος να κερδίσει όταν ρίχνει με τρία διαφορετικά μεταξύ τους ζάρια και κερδίζει αν φέρει διπλές ή τριπλές;

Αποτελέσματα ρίψης: {1,2,3,4,5,6}.
Δυνατές περιπτώσεις: XXY, XYX, YXX, XXX

$6\times5+ 6\times5+ 6\times5+6=96$ περιπτώσεις να κερδίσεις

Εγκλεισμός – Αποκλεισμός

Αρχή εγκλεισμού και αποκλεισμού (principle of inclusion and exclusion):

Για δύο οποιαδήποτε πεπερασμένα σύνολα S και T ισχύει:

$$|S \cup T| = |S| + |T| - |S \cap T|$$

Γενίκευση

Γενίκευση για n σύνολα $S_1, S_2, \ldots, S_n$:

$$
\begin{aligned}
|S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n| = \sum_{i=1}^{n} |S_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |S_i \cap S_j| + \cdots + \\
+ (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} |S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \cdots \cap S_{i_k}| + \cdots + \\
+ (-1)^{n+1} |S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n|
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα

Να βρείτε το πλήθος των χαρτιών μίας τράπουλας που είναι είτε σπαθιά ή άσσοι.

A = σπαθιά, $|A| = 13$
B = άσσοι, $|B| = 4$
$|A \cap B| = 1$

Άρα: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 13 + 4 - 1 = 16$

Θεμελιώδης Αρχή Απαρίθμησης

Θεμελιώδης αρχή της αρίθμησης:

Αν ένα γεγονός μπορεί να συμβεί σε k ανεξάρτητα στάδια έτσι ώστε το i στάδιο να μπορεί να συμβεί με m_i τρόπους $(i = 1,\ldots,k)$ τότε ο συνολικός αριθμός των τρόπων με τους οποίους μπορεί να συμβεί το γεγονός είναι

$$\prod_{i=1}^{k} m_i = m_1 \cdot m_2 \cdot \cdots \cdot m_k$$

Παράδειγμα

- Κατασκευή κωδικών για καταχώριση προϊόντων
- Περιορισμοί για κάθε κωδικό:
  - Αρχίζει με 3 λατινικούς χαρακτήρες (A-Z)
  - Ακολουθούν 4 δεκαδικά ψηφία (0 – 9)
  - Το πρώτο ψηφίο δεν πρέπει να είναι μηδέν
- Πόσους κωδικούς μπορούμε να κατασκευάσουμε;

Παράδειγμα - Λύση

- Διαδικασία σε $k = 7$ ανεξάρτητα στάδια
- 1^o, 2^o 3^o στάδιο: Επιλογή πρώτου, δεύτερου και τρίτου χαρακτήρα από 26 διαθέσιμους ($m_1 = m_2 = m_3 = 26$)
- 4ο στάδιο: Επιλογή πρώτου ψηφίου: $m_4 = 9$ (δεν επιτρέπεται το 0)
- 6^o, 7^o, 8^o στάδιο: $m_5 = m_6 = m_7 = 10$
- Τελικά: η κωδικοποίηση μπορεί να γίνει με

$$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 158{,}184{,}000 \text{ τρόπους.}$$

Δείγματα – Συνδυασμοί – Μεταθέσεις

r-δείγματα

S σύνολο και $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ μια διατεταγμένη r-άδα στοιχείων του S όχι αναγκαστικά διαφορετικών μεταξύ τους, δηλαδή

$$(a_1, a_2, \ldots, a_r) \in S^r$$

$(a_1, a_2, \ldots, a_r)$: ***r*-δείγμα** (r-sample) του S

Αριθμός r-δειγμάτων ενός n-συνόλου: $\left|S^r\right| = |S|^r = n^r$

Εφαρμογή στη δειγματοληψία

Δειγματοληψία με επανάθεση (sampling with replacement): Από αρχικό πληθυσμό *n* αντικειμένων εξάγουμε δείγμα *r* αντικειμένων

- Παίρνουμε ένα-ένα αντικείμενο, το καταγράφουμε και το τοποθετούμε πάλι πίσω στον πληθυσμό
- Λαμβάνουμε υπόψη τη σειρά των αντικειμένων που καταγράφουμε

Υπάρχουν n^r τρόποι να πάρουμε τέτοιο δείγμα.

Παράδειγμα

- Πόσες συμβολοσειρές (strings) υπάρχουν μήκους n σε ένα αλφάβητο **Σ**={0,1,2,…,k-1};

Είναι ένα n-δείγμα από ένα k-σύνολο.

Άρα k^n.

Τι μπορούμε να μετρήσουμε με n bits;

r-μεταθέσεις

$S:$ n-σύνολο

$(a_1, a_2, \ldots, a_r)$: r-δείγμα από στοιχεία του S έτσι ώστε όλα να είναι διαφορετικά μεταξύ τους $(r \le n)$

Τότε έχουμε μια ***r-μετάθεση*** (r-permutation)

Αριθμός όλων των r-μεταθέσεων ενός n-συνόλου:

$$P(n,r) = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-r+1)$$

n-μεταθέσεις

Αν $r = n$ τότε έχουμε απλά ***μετάθεση των n στοιχείων***

Αριθμός των μεταθέσεων των *n* στοιχείων:

n! (***n-παραγοντικό*** (n-factorial)):

$$P(n,n) = n! = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 1$$

Μεταθέσεις

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$0! = 1$$

Εφαρμογή στη δειγματοληψία

Δειγματοληψία χωρίς επανάθεση (sampling without replacement): Από αρχικό πληθυσμό n αντικειμένων εξάγουμε δείγμα r αντικειμένων:

- Παίρνουμε ένα-ένα αντικείμενο, το καταγράφουμε χωρίς όμως να το τοποθετούμε πάλι πίσω.
- Λαμβάνουμε υπόψη τη σειρά των αντικειμένων που καταγράφουμε

Υπάρχουν $P(n,r)$ τρόποι να πάρουμε ένα τέτοιο δείγμα.

Παράδειγμα

Αν $S = \{a,b,c,d\}$, $n = |S| = 4$, τότε τα 3-δείγματα που μπορούν να σχηματιστούν είναι (γράφουμε για απλότητα $a_1a_2a_3$ αντί για (a_1, a_2, a_3)):

aaa	*aca*	*baa*	*bca*	*caa*	*cca*	*daa*	*dca*
aab	*acb*	*bab*	*bcb*	*cab*	*ccb*	*dab*	*dcb*
aac	*acc*	*bac*	*bcc*	*cac*	*ccc*	*dac*	*dcc*
aad	*acd*	*bad*	*bcd*	*cad*	*ccd*	*dad*	*dcd*
aba	*ada*	*bba*	*bda*	*cba*	*cda*	*dba*	*dda*
abb	*adb*	*bbb*	*bdb*	*cbb*	*cdb*	*dbb*	*ddb*
abc	*adc*	*bbc*	*bdc*	*cbc*	*cdc*	*dbc*	*ddc*
abd	*add*	*bbd*	*bdd*	*cbd*	*cdd*	*dbd*	*ddd*

$$4^3 = 64$$

Παράδειγμα (συν.)

$$P(4,3) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

- 3-μεταθέσεις:

$$\begin{array}{cccc} abc & bac & cab & dab \\ abd & bad & cad & dac \\ acb & bca & cba & dba \\ acd & bcd & cbd & dbc \\ adb & bda & cda & dca \\ adc & bdc & cdb & dcb \end{array}$$

r-επιλογές

S: n-σύνολο

$\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ μη-διατεταγμένη συλλογή από r στοιχεία του S, όχι αναγκαστικά διαφορετικά μεταξύ τους

Η συλλογή ονομάζεται ***r-επιλογή*** (r-selection) του S.

Ο αριθμός των εμφανίσεων ενός στοιχείου στη συλλογή ονομάζεται ***πολλαπλότητα*** (multiplicity) του στοιχείου.

r-συνδυασμοί

S: n-σύνολο

$\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$: r-επιλογή όπου το κάθε στοιχείο έχει πολλαπλότητα 1.

Η συλλογή (υποσύνολο του S) ονομάζεται ***r*-συνδυασμός** (r-combination) των *n* στοιχείων.

Αριθμός r-συνδυασμών

Αριθμός r-συνδυασμών ενός n-συνόλου:

$$C(n,r)=\binom{n}{r}=\frac{P(n,r)}{r!}=\frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Διωνυμικοί συντελεστές

Αριθμοί της μορφής $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

$$0! = 1, \quad \binom{n}{0} = 1, \quad \binom{0}{r} = 0, \quad \binom{0}{0} = 1$$

Ιδιότητες διωνυμικών συντελεστών

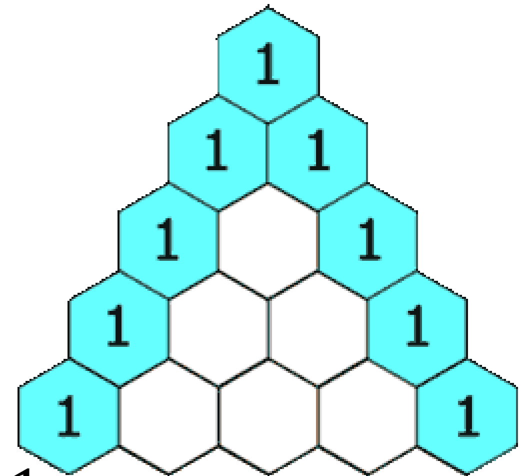
$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1}$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} = 2^n$$

Τρίγωνο του Pascal
(Pascal's triangle)

n															
0								1							
1							1		1						
2						1		2		1					
3					1		3		3		1				
4				1		4		6		4		1			
5			1		5		10		10		5		1		
6		1		6		15		20		15		6		1	
7	1		7		21		35		35		21		7		1



Αριθμός *r*-επιλογών

- Όταν δηλ. επιτρέπονται οι επαναλήψεις αλλά δεν ενδιαφέρει η σειρά

$$C(n+r-1, r) = \binom{n+r-1}{r}$$

r * και *n*-1 |.
Επιλογή *n*-1 | από *n*+*r*-1 θέσεις.

Παράδειγμα

- Πόσα διαφορετικά αποτελέσματα παίρνουμε αν ρίξουμε 6 ίδια ζάρια;
- n=6, r=6: $\binom{6+6-1}{6} = 462$
- Η παρακάτω εξίσωση πόσες λύσεις έχει; (μη αρνητικοί αριθμοί);

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5 + i_6 = 6$$

Παράδειγμα

$$S = \{a,b,c,d\} \qquad n = |S| = 4$$

3-επιλογές που μπορούν να σχηματιστούν:

(γράφουμε για απλότητα $a_1 a_2 a_3$ αντί για $\{a_1, a_2, a_3\}$):

aaa	bbb	ccc	ddd
aab	aac	aad	
bba	bbc	bbd	
cca	ccb	ccd	
dda	ddb	ddc	
abc	abd	acd	bcd

$$\binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$$

Παράδειγμα (συν.)

Από τις παραπάνω επιλογές αυτές μόνο οι:

$$abc \quad abd \quad acd \quad bcd$$

αποτελούν 3-συνδυασμούς αφού τα στοιχεία τους είναι διαφορετικά και το πλήθος τους είναι

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 4.$$

Με Λίγα Λόγια…

Επανατοποθέτηση;

Μετράει η σειρά;

	ΝΑΙ	**ΟΧΙ**
ΝΑΙ	*r*-δείγμα	*r*-μετάθεση
ΟΧΙ	*r*-επιλογή	*r*-συνδυασμός

Προσοχή – Πολλά Λάθη

- Από 5 χαρτιά από μία τράπουλα με 52 χαρτιά πόσα είναι εκείνα που έχουν τουλάχιστον 3 άσους;

1. 4 τρόποι επιλογής 3 από 4 άσους
2. 48*49/2=1176 τρόποι επιλογής των άλλων δύο καρτών

Άρα 4*1176=4704 τρόποι.

Δεύτερος Τρόπος Υπολογισμού

- Πόσες πεντάδες έχουν 3 ακριβώς άσους:
  - 4 τρόποι επιλογής άσου
  - 1128 τρόποι επιλογής άλλων χαρτιών

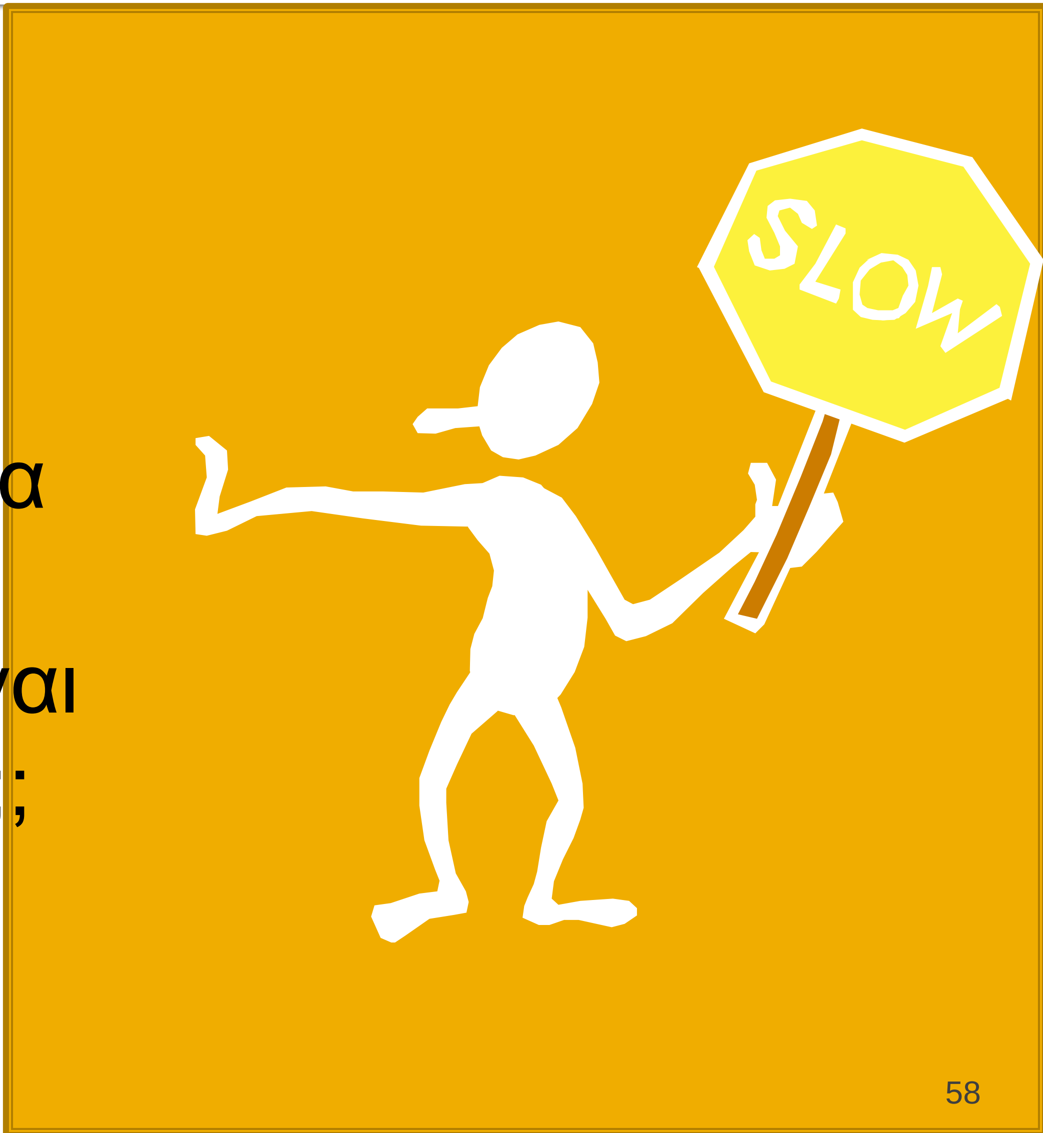
- Πόσες πεντάδες έχουν 4 ακριβώς άσους:
  - 1 τρόπος επιλογής άσου
  - 48 τρόποι επιλογής άλλων χαρτιών

Άρα 48+4*1128=4560

Λάθος

$4704 \neq 4560$

Τουλάχιστον ένα από τα δύο επιχειρήματα είναι λάθος. Ποιο;;;;;;



Το Κόλπο με την Τράπουλα…

Επί της αρχής:

1. Ο θεατής μπορεί να επιλέξει οποιονδήποτε r-συνδυασμό με $C(n,r)=\binom{52}{r}$ τρόπους
2. Ο βοηθός παρουσιάζει μία r-μετάθεση με r-1 κάρτες $P(n,r-1)=\dfrac{52!}{(52-r+1)!}$

Αρκεί C(n,r)≤P(n,r-1)

Το Κόλπο με την Τράπουλα…

Για r=5 $\quad C(52,5)=\binom{52}{5}=2{,}598{,}860<P(52,4)=\dfrac{52!}{48!}=6{,}497{,}400$

Για r=4 $\quad C(52,4)=\binom{52}{4}=270{,}725>P(52,3)=\dfrac{52!}{49!}=132{,}600$

και άρα από την αρχή του περιστερώνα δεν μπορούμε να διακρίνουμε ποιο ακριβώς φύλλο θα είναι

Το Κόλπο με την Τράπουλα…

Ο βοηθός μπορεί να επικοινωνήσει με δύο τρόπους:

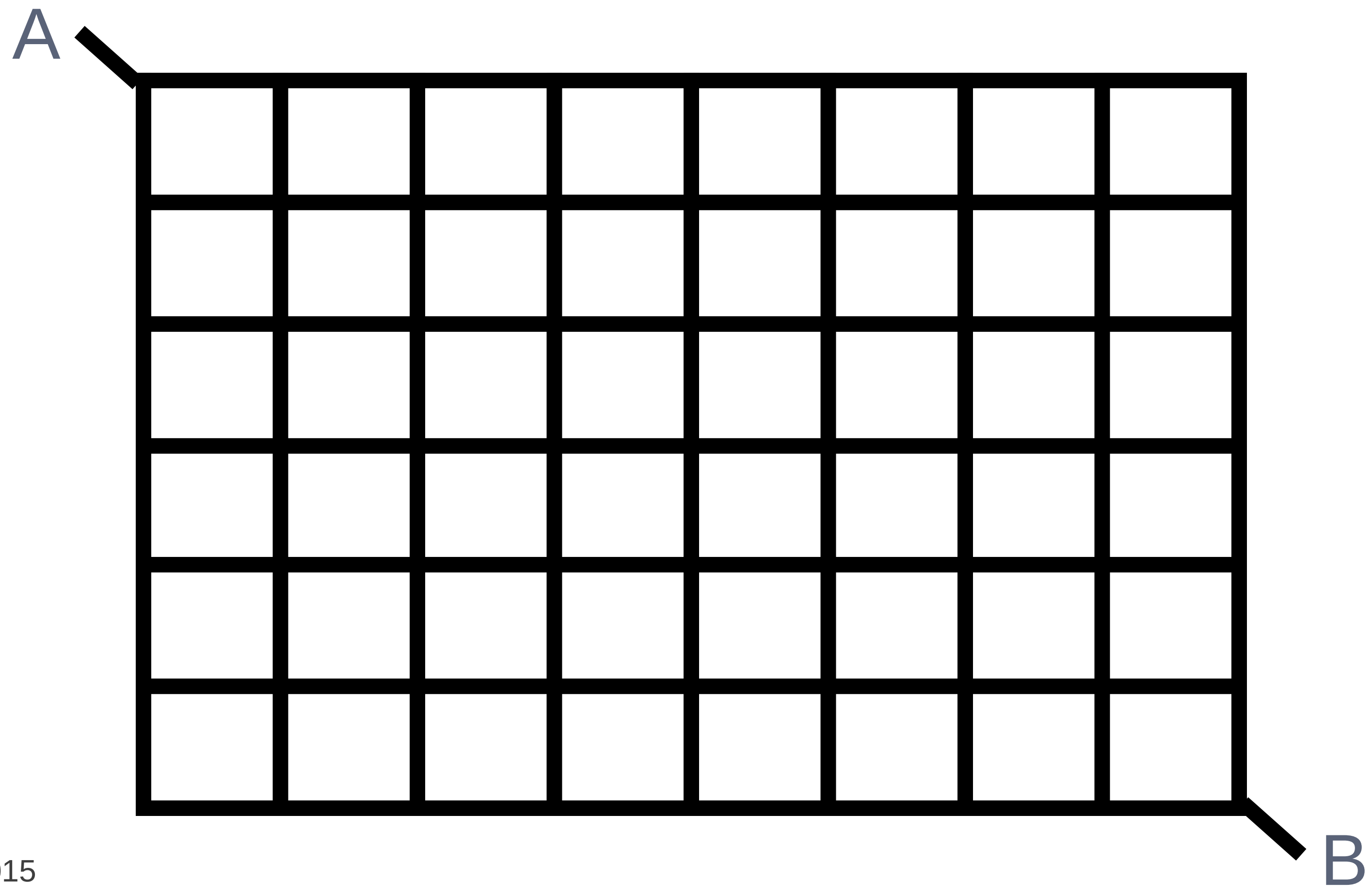
1. Να δώσει τις 4 κάρτες με οποιαδήποτε σειρά (4!=24), για να καθορίσουμε ποιο από τα υπόλοιπα 48 χαρτιά είναι.
2. Ο βοηθός καθορίζει ποια από τα 5 χαρτιά θα εμφανίσει

Το Κόλπο με την Τράπουλα…

1. Δύο φύλλα τουλάχιστον θα είναι ίδιου τύπου. Το κρυφό θα είναι ένα από τα δύο και το πρώτο κατά σειρά καθορίζει τον τύπο του κρυφού χαρτιού.
2. Επίσης, αν τα βάλω σε κύκλο τα 13 χαρτιά ίδιου τύπου, επιλέγω πάντα εκείνο να εμφανίσω που θα πρέπει να μετακινηθώ προς τα δεξιά ≤6 κινήσεις για να το βρω.
3. Τα υπόλοιπα τρία χαρτιά μου καθορίζουν πόσο θα πρέπει να μετακινηθώ από το πρώτο (3!=6 μεταθέσεις) .

Ελάχιστα Μονοπάτια

Πόσα ελάχιστα μονοπάτια υπάρχουν από το A στο B;



Ασκήσεις

1. Στρίβουμε ένα νόμισμα 10 φορές. Σε πόσες από τις 2^{10} περιπτώσεις:
    1. Ξεκινάμε με 3 κορώνες στη σειρά 2^7
    2. Τελειώνουμε με 3 γράμματα στη σειρά 2^7
    3. Ξεκινάμε με 3 κορώνες και τελειώνουμε με 3 γράμματα στη σειρά 2^4
    4. Ξεκινάμε με 3 κορώνες ή τελειώνουμε με 3 γράμματα στη σειρά $2^7 + 2^7 - 2^4 = 240$

Ασκήσεις

1. Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε έξι παιδιά που πιάνονται με τα χέρια σε έναν κύκλο;

    1. Αριθμός μεταθέσεων σε ευθεία $6! = 720$

    2. Κλάσεις ισοδυναμίας για κάθε περιστροφή κύκλου

$$6$$

Ασκήσεις

1. Πόσες δυαδικές ακολουθίες υπάρχουν με 5 άσους και 3 μηδενικά;

2. Διάλεξε 5 από 8 για να βάλεις άσους και τα υπόλοιπα 3 για 0. Άρα:

   C(8,5)

Ασκήσεις

1. Να δείξετε ότι οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:
   1. Πόσες μη αρνητικές λύσεις υπάρχουν για την εξής εξίσωση: $a+b+c=10$
   2. Πόσες δυαδικές ακολουθίες μήκους 12 υπάρχουν που έχουν ακριβώς 2 άσους και 10 μηδενικά;