ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ «ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ» - 14/6/2016

Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες και 45 λεπτά

1. (2 μονάδες) Αναφέρετε χωρίς αιτιολόγηση αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής.

1. Ένα γνησίως y-μονότονο πολύγωνο μπορεί να τριγωνοποιηθεί σε γραμμικό χρόνο.
2. Κάθε εσωτερικός κόμβος εκτός της ρίζας ενός kd-δένδρου αντιστοιχεί σε μία ορθογώνια περιοχή.
3. Στο πρόβλημα της χύτευσης, αν ένα πολύεδρο μπορεί να αποκολληθεί από τη μήτρα με μία ακολουθία μετατοπίσεων τότε μπορεί να αποκολληθεί με μία μοναδική μετατόπιση.
4. Η τομή n ημιεπιπέδων (μαζί με τα σύνορά τους) δεν μπορεί να εκφυλισθεί σε ένα σημείο.
5. Το μέγιστο πλήθος των τραπεζίων σε έναν τραπεζιομερή χάρτη από n ευθύγραμμα τμήματα είναι γραμμικό.
6. Η τεχνική της κλασματικής επαλληλίας επιτρέπει την παράλληλη εκτέλεση ερωτημάτων αναζήτησης σε διατεταγμένες λίστες.
7. Ένα ευθύγραμμο τμήμα αποθηκεύεται σε το πολύ O(logn) κόμβους ενός δένδρου ευθυγράμμων τμημάτων πάνω σε n ευθύγραμμα τμήματα.
8. Τα προτεραϊκά δένδρα αναζήτησης, λειτουργούν ως δένδρα αναζήτησης για την *y*-συντεταγμένη και ως σωρός (heap) για την *x*-συντεταγμένη.
9. Η πολυπλοκότητα μίας επίπεδης υποδιαίρεσης είναι ίση με το άθροισμα του πλήθους των κορυφών και των ακμών της.
10. Στο δυϊκό επίπεδο μία ευθεία y=ax+b αντιστοιχεί στο σημείο (a,-b).

2. (1 μονάδα) Έστω D ένας διπλοσυνδεδεμένος κατάλογος ακμών για μία επίπεδη υποδιαίρεση S. Πόσες έσω-συνιστώσες μπορεί να έχει μία έδρα; Πώς μπορούμε να διατρέξουμε το εξωτερικό σύνορο μίας έδρας με δεδομένο ένα δείκτη προς την εγγραφή της έδρας στον D; Πώς μπορούμε να εντοπίσουμε όλες τις προσπίπτουσες ακμές σε μία κορυφή με δεδομένο έναν δείκτη προς αυτή την κορυφή στον D;

3. (2.5 μονάδες) Μας δίνονται δύο σύνολα από κόκκινα (σύνολο ***R***) και μπλε (σύνολο ***B***) ευθύγραμμα τμήματα στο επίπεδο με ***n*** και ***m*** στο πλήθος ευθύγραμμα τμήματα αντίστοιχα. Δεν υπάρχουν τομές μεταξύ των ευθυγράμμων τμημάτων στο σύνολο $\boldsymbol{R} \cup \boldsymbol{B}$. Θέλουμε να αναφέρουμε κάθε κόκκινο ευθύγραμμο τμήμα που είναι ***μπλε-περιστοιχισμένο***. Ένα κόκκινο ευθύγραμμο τμήμα ***r*** είναι μπλε-περιστοιχισμένο όταν κάθε οριζόντια γραμμή που το τέμνει συναντά για πρώτη φορά από αριστερά και από δεξιά κάποιο μπλε ευθύγραμμο τμήμα. Δηλαδή, για κάθε σημείο του ***r*** ακριβώς αριστερά (όπως ορίζεται από μία οριζόντια γραμμή) και ακριβώς δεξιά υπάρχει κάποιο μπλε ευθύγραμμο τμήμα.

Να δώσετε έναν αλγόριθμο σάρωσης που παίρνει ως είσοδο τα σύνολα ***R*** και ***B*** και αναφέρει όλα τα μπλε-περιστοιχισμένα κόκκινα ευθύγραμμα τμήματα του ***R***. Θεωρείστε ότι όλα τα άκρα των τμημάτων στο $\boldsymbol{R} \cup \boldsymbol{B}$ έχουν διαφορετικές *y*-συντεταγμένες για να απλοποιήσετε τον αλγόριθμο..

α) (0.5) Να ορίσετε την κατάσταση της σαρωτικής ευθείας. Να περιγράψετε την καταστασιακή δομή καθώς και την ουρά συμβάντων.

β) (0.1) Δώστε την αρχικοποίηση του αλγορίθμου σας.

γ) (1.3) Να αναφέρετε τους τύπους των συμβάντων καθώς και πως αντιμετωπίζεται ο καθένας (στην ουσία σε αυτό το ερώτημα περιγράφετε τον αλγόριθμο).

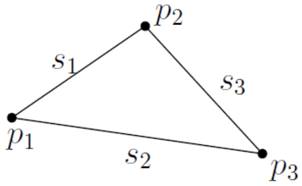
δ) (0.4) Δώστε τη χρονική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας ως συνάρτηση των ***n*** και ***m***. Πόσο χώρο χρειάζεται ο αλγόριθμος;

ε) (0.2) Συζητήστε πως μπορούμε να απομακρύνουμε την υπόθεση περί διακριτών *y*-συντεταγμένων.

4. (2 μονάδες) Δοθέντος ενός συνόλου ***S*** από ευθύγραμμα τμήματα σε γενική θέση, ο τραπεζιομερής χάρτης ***T*(*S*)** και η αντίστοιχη δομή δεδομένων ***D*** κατασκευάζονται με έναν αυξητικό αλγόριθμο ***I***. Στο ***D***, όταν ένας εσωτερικός κόμβος περιέχει ένα σημείο/ευθύγραμμο τμήμα, τότε προχωράμε στα αριστερά του κόμβου όταν κινούμαστε αντίστοιχα αριστερά/πάνω στο επίπεδο ενώ η κίνηση προς τα δεξιά σημαίνει ότι μετακινούμαστε δεξιά/κάτω στο επίπεδο.

α) (0.4) Χρησιμοποιώντας τον ***I***, ποιος είναι ο αναμενόμενος χρόνος για τον υπολογισμό των ***T*(*S*)** και ***D***; Ποιο είναι το αναμενόμενο μέγεθος της ***D***; Ποιος είναι ο αναμενόμενος χρόνος ερώτησης για ένα σημείο ερώτησης ***q***;

β) (1.6) Έστω ότι ο ***I*** επεξεργάζεται τα ευθύγραμμα τμήματα του παρακάτω σχήματος με τη σειρά s_1, s_2 και s_3. Να σχεδιάσετε τον τραπεζιομερή χάρτη και την αντίστοιχη δομή δεδομένων μετά την ένθεση κάθε ευθύγραμμου τμήματος.



5. (1 μονάδα) Έστω ότι το απλό πολύγωνο ***P*** έχει τριγωνοποιηθεί. Περιγράψτε έναν απλό αλγόριθμο για τον υπολογισμό του πλήθους των καμερών που χρειάζονται έτσι ώστε το πολύγωνο ***P*** να μπορεί να καλυφθεί. Ο αλγόριθμος θα πρέπει να εκετελείται σε γραμμικό χρόνο και να χρησιμοποιεί το πολύ $\lfloor n/3 \rfloor$ κάμερες.

6. (2 μονάδες) Δοθέντος ενός συνόλου ***S*** από ***n*** μη κάθετα ευθύγραμμα τμήματα στο επίπεδο (τα οποία μπορεί να τέμνονται) περιγράψτε έναν αλγόριθμο για να αποφασίζετε αν υπάρχει ή όχι μία μη κάθετη ευθεία που να τέμνει όλα ευθύγραμμα τμήματα στο ***S***. Πιο συγκεκριμένα σας ζητείται:

α) (1) Να ορίσετε το αντίστοιχο δυϊκό πρόβλημα.

β) (1) Να περιγράψετε έναν αλγόριθμο που να λύνει το πρόβλημα (μπορείτε να θεωρήσετε ως γνωστούς τους αλγορίθμους που περιγράψαμε στο μάθημα). Να δείξετε την πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας ως συνάρτηση του $n=|S|$.

7. (2 μονάδες) Α) (1 μονάδα) Έστω ***I*** ένα σύνολο διαστημάτων επί της πραγματικής ευθείας. Θέλουμε να αποθηκεύσουμε αυτά τα διαστήματα έτσι ώστε να μπορούμε να προσδιορίζουμε γρήγορα τα διαστήματα που περιέχονται εξ ολοκλήρου σε ένα δεδομένο διάστημα $[x, x']$. Να αναφέρετε πως αυτό το ερώτημα υλοποιείται με ένα εκτασιακό δένδρο χρησιμοποιώντας χώρο $O(n \log n)$, όπου ***n*** είναι το πλήθος των διαστημάτων, και απαντώντας σε τέτοια ερωτήματα σε χρόνο $O(\log n + k)$, όπου ***k*** το πλήθος των απαντήσεων.

Β) (1 μονάδα) Έστω ***I*** ένα σύνολο διαστημάτων επί της πραγματικής ευθείας. Θέλουμε να αποθηκεύσουμε αυτά τα διαστήματα έτσι ώστε να μπορούμε να προσδιορίζουμε γρήγορα τα διαστήματα που περιέχουν εξ ολοκλήρου ένα δεδομένο διάστημα $[x, x']$. Να αναφέρετε πως αυτό το ερώτημα υλοποιείται με ένα προτεραϊκό δένδρο αναζήτησης χρησιμοποιώντας χώρο $O(n)$, όπου ***n*** είναι το πλήθος των διαστημάτων, και απαντώντας σε τέτοια ερωτήματα σε χρόνο $O(\log n + k)$, όπου ***k*** το πλήθος των απαντήσεων.

Καλή Επιτυχία!!!

Ενδεικτικές Απαντήσεις

1.

1. Α
2. Ψ (οι μη φραγμένες περιοχές δεν είναι ορθογώνιες)
3. Α
4. Ψ
5. Α
6. Ψ (επιτρέπει σε μία τη δυαδική αναζήτηση και στις υπόλοιπες το αποτέλεσμα υπολογίζεται μέσω δεικτών σε O(1) χρόνο)
7. Α
8. Α (δεν παίζει ρόλο ως προς ποιες συντεταγμένες φτιάχνουμε το προτεραϊκό δένδρο αναζήτησης).
9. Ψ (+ πλήθος εδρών)
10. Α

2.

Παίρνοντας την έξω-συνιστώσα της έδρας μπορούμε να διαπεράσουμε όλες τις ακμές απλά παίρνοντας της επόμενη κάθε ακμής.

Μπορεί να έχει παραπάνω από μία ή και 0.

Χρησιμοποιούμε την επόμενη ακμή της δίδυμης. Αυτό μας επιτρέπει να παίρνουμε κατά την ωρολόγια φορά όλες τις ακμές.

3.

α) Η κατάσταση της σαρωτικής ευθείας είναι το σύνολο των ευθυγράμμων τμημάτων του $R \cup B$ που την τέμνουν ταξινομημένα ως προς τη *x*-συντεταγμένη από αριστερά προς δεξιά (η ευθεία σάρωσης κινείται κατά τον *y*-άξονα). Κάθε κόκκινο τμήμα s που τέμνει την ευθεία σάρωσης έχει μία δυαδική μεταβλητή surround_s που είναι ΑΛΗΘΗΣ αν είναι μπλε-περιστοιχισμένη πάνω από την ευθεία σάρωσης (μέχρι αυτό το σημείο δηλαδή) και ΨΕΥΔΗΣ διαφορετικά.

Η καταστασιακή δομή T είναι ένα ζυγισμένο δυαδικό δένδρο που αποθηκεύει την κατάσταση στα φύλλα του. Κάθε φύλλο αντιστοιχεί σε ένα ευθύγραμμο τμήμα (μπλε ή κόκκινο) και περιέχει και την αντίστοιχη δυαδική του μεταβλητή εφόσον είναι κόκκινο.

Η λίστα συμβάντων είναι μία λίστα που αποθηκεύει τα συμβάντα που είναι όλα τα άκρα των ευθυγράμμων τμημάτων στο $R \cup B$ ταξινομημένα σε φθίνουσα σειρά ως προς την y-συντεταγμένη.

β) Η αρχικοποίηση συνίσταται στην κατασκευή μία άδειας καταστασιακής δομής καθώς και της λίστας συμβάντων μετά από την ταξινόμηση των άκρων των ευθυγράμμων τμημάτων σε φθίνουσα σειρά με βάση την y-συντεταγμένη.

γ) Υπάρχουν 4 τύποι συμβάντων που αντιστοιχούν στο πάνω και κάτω άκρο ενός κόκκινου ή μπλε ευθύγραμμου τμήματος. Οι περιπτώσεις του αλγορίθμου ακολουθούν:

1. *Άνω άκρο p του κόκκινου ευθύγραμμου τμήματος s:* Αναζητούμε το p στην δομή T. Αν τα τμήματα ακριβώς στα αριστερά ή/και στα δεξιά του p είναι κόκκινα τότε θέτουμε surround_s σε ΨΕΥΔΗΣ. Αν και τα δύο τμήματα ακριβώς στα δεξιά και στα αριστερά είναι μπλε τότε θέτουμε surround_s σε ΑΛΗΘΕΣ. Έπειτα, ενθέτουμε το s μαζί με την μεταβλητή surround_s στην δομή T.
2. *Κάτω άκρο p του κόκκινου ευθύγραμμου τμήματος s:* Αναζητούμε το p στην δομή T. Αν surround_s είναι ΑΛΗΘΕΣ, το αναφέρουμε. Διαγράφουμε το s από την T.
3. *Άνω άκρο p του μπλε ευθύγραμμου τμήματος s:* Ενθέτουμε το s στην δομή T.

4. *Κάτω άκρο p του μπλε ευθύγραμμου τμήματος s:* Αναζητούμε το p στην T και διαγράφουμε το s. Αν ακριβώς αριστερά του ή ακριβώς δεξιά του υπήρχε κάποιο κόκκινο τμήμα τότε θέτουμε την αντίστοιχη σημαία του σε ΨΕΥΔΗΣ.

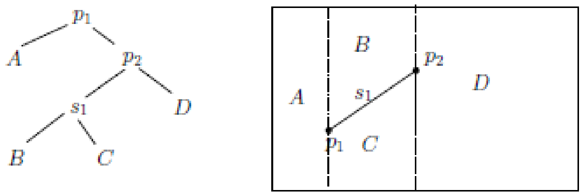
δ) Υπάρχουν συνολικά 2(n+m) άκρα και άρα υπάρχουν O(n+m) συμβάντα για τα οποία χρειαζόμαστε O((n+m)log(n+m)) χρόνο συνολικά για να τα ταξινομήσουμε κατά την y-συντεταγμένη στην φάση της αρχικοποίησης. Κάθε συμβάν έχει ως συνέπεια μία ένθεση ή μία διαγραφή από την T καθώς και τον έλεγχο των γειτονικών του φύλλων. Κάθε μία τέτοια πράξη απαιτεί O(log(n+m)) χρόνο για ένα ζυγισμένο δυαδικό δένδρο (π.χ. AVL-δένδρο). Επομένως συνολικά ο χρόνος είναι O((n+m)log(n+m)) ενώ ο αλγόριθμος χρειάζεται γραμμικό χώρο.

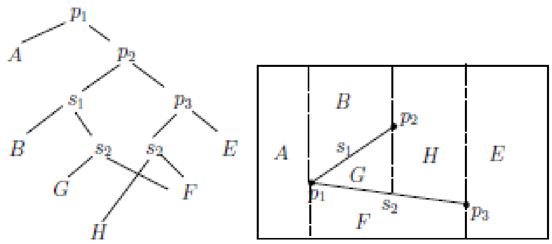
ε) ε) Στην περίπτωση των μη διακριτών y-συντεταγμένων αυτό που μας ενοχλεί είναι ότι ένα συμβάν μπορεί να αντιστοιχεί σε πολλά σημεία. Για να το λύσουμε, απλά θεωρούμε ότι κατά την ταξινόμηση σε φθίνουσα σειρά, ένα σημείο p με ίδια y-συντεταγμένη με άλλο σημείο q θα είναι πριν στην ταξινομημένη λίστα συμβάντων αν η x-συντεταγμένη του p είναι μικρότερη του q. Αντίστοιχα πρέπει να γίνουν αλλαγές και στον χειρισμό των συμβάντων. Τι γίνεται όμως αν δύο άκρα συμπίπτουν; Σε αυτή την περίπτωση πρέπει να ορίσουμε κατάλληλα την έννοια της μπλε-περιστοιχησιμότητας. Αν ένα άκρο του κόκκινου συμπίπτει με μπλε τότε ορίζουμε ότι το κόκκινο δεν είναι μπλε-περιστοιχήσιμο. Ο αλγόριθμος λειτουργεί σωστά ανεξαρτήτως της σειράς των άκρων στη λίστα συμβάντων.

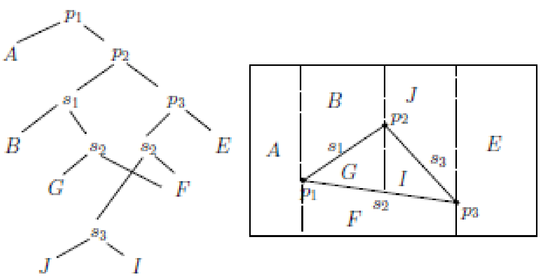
4.

α) O(nlogn) , O(n) και O(logn) αντίστοιχα

β) Φαίνονται στις παρακάτω εικόνες.







5.

Πρώτα υπολογίζουμε ένα 3-χρωματισμό του P. Δημιουργούμε το δυικό γράφημα της τριγωνοποίησης του P και ως γνωστό αυτό το γράφημα θα είναι ένα δένδρο. Επιλέγουμε οποιοδήποτε κόμβο του δένδρου ως ρίζα και χρωματίζουμε τις κορυφές του αντίστοιχου τριγώνου με τρία χρώματα. Έπειτα επαναλαμβάνουμε εκτελώντας μία διαπέραση κατά βάθος στο δένδρο (DFS). Κάθε φορά που ελέγχουμε ένα τρίγωνο, δύο από τις κορυφές του θα είναι ήδη χρωματισμένες και άρα χρωματίζουμε τον κόμβο με το εναπομείναν χρώμα.

Όταν ολοκληρωθεί ο χρωματισμός, επιλέγουμε το χρώμα που έχουμε χρησιμοποιήσει λιγότερο και τοποθετούμε σε αυτές τις κορυφές τις κάμερες.

6.

α) Κάθε ευθύγραμμο τμήμα στο δυικό αποτελεί την τομή δύο μη παράλληλων ημιεπιπέδων που ορίζονται από τις δυικές ευθείες που αντιστοιχούν στα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος. Έστω ότι ονομάζουμε αυτές τις περιοχές ως ημιπεριοχές. Το πρόβλημα είναι το εξής: Δοθέντων τέτοιων ημιπεριοχών στο επίπεδο να βρεθεί αν υπάρχει κάποιο σημείο που να ανήκει σε όλες τις ημιπεριοχές. Αυτό το σημείο αντιστοιχεί σε μία ευθεία στο πρωτεύον πρόβλημα που τέμνει κάθε ευθύγραμμο τμήμα που περιέχει στο δυικό του αυτό το σημείο.

β) Έχουμε n ημιπεριοχές που αντιστοιχούν σε 2n ημιεπίπεδα. Βρίσκουμε την τομή όλων αυτών των ημιεπιπέδων με τους γνωστούς αλγόριθμους και εφόσον αυτή δεν είναι κενή απαντάμε θετικά (σε O(nlogn) χρόνο χειρότερης περίπτωσης ή O(n) αναμενόμενο χρόνο)

Η παραπάνω απάντηση είναι **λάθος**. Αυτό γιατί δεν θέλουμε ένα σημείο ταυτόχρονα και στα 2n ημιεπίπεδα αλλά σε n από αυτά. Η σωστή λύση είναι να χρησιμοποιήσουμε διπλοσυνδεδεμένο κατάλογο ακμών και να αποθηκεύουμε αυτές τις μη κυρτές περιοχές (σφήνες) με στόχο να βρούμε την τομή τους. Αν αυτή είναι μη κενή τότε είμαστε OK. Συνολικός χρόνος $O(n^2 \log n)$.

7.

Α) Χρησιμοποιούμε ένα εκτασιακό δένδρο (range tree) που χρησιμοποιεί O(nlogn) χώρο. Κάθε ευθύγραμμο τμήμα [x,y] το αναπαριστούμε στις 2 διαστάσεις ως σημείο (x,y). Το ερώτημα [α,β] τώρα γίνεται ως εξής: Επέστρεψε όλα τα σημεία στο ορθογώνιο [α,α] × [β,β].

B) Χρησιμοποιούμε ένα προτεραϊκό δένδρο αναζήτησης που χρησιμοποιεί γραμμικό χώρο. Κάθε ευθύγραμμο τμήμα [x,y] το αναπαριστούμε στις 2 διαστάσεις ως σημείο (x,y). Το ερώτημα για το διάστημα [α,β] γίνεται: επέστρεψε όλα τα σημεία στο διάστημα (-∞, α] × [β, +∞).